

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

---

**Р. Г. Салахудинов**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ  
ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ  
НЕРАВЕНСТВ. I**

**Метод конформных отображений в теории  
изопериметрических неравенств**

Учебное пособие

**КАЗАНЬ – 2013**

**УДК 517.5 : 517.956**

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

учебно-методической комиссии института  
математики и механики им. Н. И. Лобачевского  
Протокол № 6 от 13 июня 2013 г.

заседания кафедры математического анализа  
Протокол № 9 от 7 июня 2013 г.

Научный редактор  
доктор физ.-мат. наук, проф. Ф. Г. Авхадиев.

Рецензенты:  
доктор физ.-мат. наук, проф. С. Р. Насыров,  
доктор физ.-мат. наук, доц. А. М. Бикчентаев.

**Салахудинов Р. Г.**

**Введение в теорию изопериметрических неравенств. I (Метод конформных отображений в теории изопериметрических неравенств): Учебное пособие/ Р. Г. Салахудинов – Казань: Казанский университет, 2013. – 100 с.**

2-е изд. (расширенное)

Пособие рассчитано на студентов старших курсов, специализирующихся в области комплексного анализа или в теории дифференциальных уравнений. Предполагается, что читатели знакомы с основами математического анализа, дифференциальных уравнений в частных производных и теории функций комплексного переменного.

© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013 г.

© Салахудинов Р. Г., 2013 г.

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Конформные моменты односвязной области</b>	<b>5</b>
1.1	Основные обозначения и определения. Простейшие изопериметрические неравенства . . . . .	6
1.2	Изопериметрические неравенства и двусторонние оценки . . .	9
1.3	Представление конформного момента инерции через коэффициенты отображающей функции . . . . .	11
1.4	Два изопериметрических неравенства для конформного момента инерции . . . . .	12
1.5	Простейшие примеры вычисления функционалов . . . . .	18
1.6	Другие примеры вычисления функционалов $\mathbf{R}(\Omega)$ и $\mathbf{I}_c(\Omega)$ . .	26
1.7	Конформные моменты порядка $\alpha$ . Конструирование гипотез. Конформный момент 4-го порядка . . . . .	35
1.8	Примеры вычисления конформных моментов порядка $\alpha$ . . .	37
1.9	Пространство Бергмана аналитических функций . . . . .	41
1.10	Теорема о норме Бергмана произведения аналитических функций и её следствия. Изопериметрические цепочки неравенств . . . . .	44
<b>II</b>	<b>Жесткость кручения односвязной области</b>	<b>53</b>
2.1	Неравенство Сен-Венана – Поля. Доказательство Давенпорта	54
2.2	Изопериметрическое неравенство между жесткостью кручения и конформным моментом инерции . . . . .	59
2.3	Формула Давенпорта для областей с неограниченной площадью	66
2.4	Еще одно оригинальное доказательство неравенства Сен-Венана — Поля и следствия из него . . . . .	69
2.5	Доказательство одного неравенства Пейна . . . . .	72
2.6	Примеры вычисления жесткости кручения односвязной области	75
<b>A</b>	<b>Вспомогательный сведения из теории функций комплексного переменного</b>	<b>81</b>
A.1	Теорема Римана о конформном отображении . . . . .	81

А.2	Отображения многоугольников . . . . .	82
А.3	Дробно–линейные отображения . . . . .	82
<b>В</b>	<b>Таблицы для некоторых функционалов плоских односвязных областей</b>	<b>85</b>
В.1	Канонические области . . . . .	85
	Круг . . . . .	85
	Эллипс . . . . .	86
	Узкий эллипс . . . . .	87
	Равносторонний треугольник . . . . .	87
	Квадрат . . . . .	87
	Прямоугольник . . . . .	88
	Узкий прямоугольник . . . . .	88
	Полукруг . . . . .	89
	Круговой сектор . . . . .	89
	Узкий сектор . . . . .	90
	Области, ограниченные гиперболами . . . . .	91
В.2	Примеры комбинации функционалов . . . . .	92
	$I_c/R^4$ . . . . .	92
	$I_c/A^2$ . . . . .	93
	$P/A^2$ . . . . .	93
	$P/I_c$ и $I_c/P$ . . . . .	93
	$P/I$ и $I/P$ . . . . .	94
	$R/\rho$ и $\rho/R$ . . . . .	95
	$I_c/I$ и $I/I_c$ . . . . .	96
	<b>Литература</b>	<b>97</b>
	<b>Предметный указатель</b>	<b>99</b>

# Глава I

## Конформные моменты односвязной области

Изучение свойств физических и геометрических функционалов области является одной из основных задач математической физики. Простейшие примеры геометрических функционалов области хорошо известны – длина границы и площадь области, площадь поверхности и объем тела. Более сложные геометрические характеристики изучаются в курсах математического анализа, геометрии и уравнений математической физики.

Физические функционалы связаны с характеристиками, введенными и изучаемыми в физике. Известными примерами являются, например, емкость конденсатора, собственная основная частота колебания мембраны (барабана). Определение физического функционала связано с решением некоторой краевой задачи или вариационной проблемы. Заметим, что и физические, и геометрические функционалы зависят от геометрии области, например, от ее формы и размера.

Одним из основных в задачах математической физики является метод конформных отображений, основанный на теореме Римана о конформном отображении плоских односвязных областей на круг. Отметим, что этот метод является универсальным инструментом в различных областях математики, механики и физики.

В настоящем пособии изучены разнообразные применения метода конформных отображений для доказательства изопериметрических неравенств как для классических физических функционалов, так и для новых геометрических характеристик области.

Отметим, что метод конформных отображений в изопериметрических неравенствах математической физики блестяще и последовательно применили Г. Полия и Г. Сеге (см. монографию [1]). Это привело их к глубоким и ярким результатам и описанию трудных нерешенных проблем.

Большая часть параграфов учебного пособия завершается упражне-

ниями, призванные закрепить изученный материал. Некоторые упражнения пособия снабжены ответами, указанными в конце упражнений в квадратных скобках. Часть простых, по мнению автора, упражнений не сопровождаются ответами, чтобы читатель мог самостоятельно, не теряя интереса, найти свой путь для решения задач.

Обратим внимание читателя на учебное пособие Ф. Г. Авхадиева [2], объединенное с данным пособие общей тематикой. Часть материалов данной главы пересекается с результатами изложенными в учебном пособии. Эти материалы можно рассматривать как альтернативную форму изложения. Большая часть материалов пособий не совпадают, но дополняют друг друга. Читателю, интересующимся тематикой изопериметрических неравенств, рекомендуется ознакомиться и с упомянутым пособием.

## 1.1 Основные обозначения и определения. Простейшие изопериметрические неравенства

Будем обозначать через  $\Omega$  произвольную односвязную область комплексной плоскости  $z$ . Будем предполагать, что  $\Omega$  не совпадает со всей плоскостью. Как обычно,  $\partial\Omega$  будет обозначать границу области.

С переменной  $\zeta$  мы будем связывать другой экземпляр комплексной плоскости, называемой вспомогательной. Через  $\mathbb{D}_r$  ( $\underline{Disk}^1$ ) будем обозначать круг радиуса  $r$ . Например, стандартной вспомогательной областью плоскости  $\zeta$  является круг единичного радиуса  $\mathbb{D}_1 := \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ ; так как, в основном, в учебном пособии будет использоваться единичный круг, обозначим его, опустив индекс, через  $\mathbb{D}$ . Вспомогательной областью часто является верхняя полуплоскость  $\mathbb{H}$  ( $\underline{Halfplane}$ ), а также полоса  $\mathbb{S}$  ( $\underline{Strip}$ ).

По теореме Римана существует функция, конформно отображающая единичный круг на область  $\Omega$ . Будем обозначать ее через  $z = z(\zeta)$ . Таким образом,  $z : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  — однолистная и аналитическая в  $\mathbb{D}$  функция (конформное отображение), в частности,  $z'(\zeta) \neq 0$ ,  $\zeta \in \mathbb{D}$  (см. монографии [3], [4]).

Будем также использовать следующие общепринятые обозначения:

$\mathbf{A}(\Omega)$  — площадь области  $\Omega$  ( $\underline{Area}$ );

$\mathbf{L}(\Omega)$  — длина границы области  $\Omega$  ( $\underline{Length}$ );

$\rho(z, \Omega)$  — функция расстояния от точки  $z(\in \Omega)$  до границы  $\partial\Omega$ ;

---

<sup>1</sup>Здесь и далее по тексту приводятся соответствующее название на английском языке, призванное облегчить запоминание обозначений и упростить работу с источниками на английском языке в дальнейшем.

$\rho(\Omega) := \sup \{\rho(z, \Omega) : z \in \Omega\}$  — радиус наибольшего круга, содержащегося в  $\Omega$  (*inradius*);

$R(z, \Omega)$  — конформный радиус области  $\Omega$  в точке  $z$  (*conformal radius*).  
Имеет место формула

$$R(z, \Omega) = |z'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) = |z'(\zeta)|R(\zeta, \mathbb{D}). \quad (1.1)$$

На практике иногда более удобным бывает выражение конформного радиуса через отображение, обратное к  $z = z(\zeta)$ :

$$R(z, \Omega) = \frac{(1 - |\zeta(z)|^2)}{|\zeta'(z)|}. \quad (1.2)$$

Введем также следующие обозначения:

$R(\Omega) := \sup \{R(z, \Omega) : z \in \Omega\}$  — максимальный внутренний радиус области  $\Omega$ ;

$u(z, \Omega)$  — функция напряжения области  $\Omega$  (*warping function, stress function*), которая по определению является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta u = -2 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  — оператор Лапласа (здесь и далее предполагается, что существует классическое решение рассматриваемой краевой задачи);

$u(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} u(z, \Omega)$  — максимум функции напряжения.

Жесткостью кручения области  $\Omega$  называется следующий физический функционал (*torsional rigidity*):

$$P(\Omega) := 2 \iint_{\Omega} u(z, \Omega) dA, \quad (1.4)$$

где через  $dA$  обозначен дифференциальный элемент площади.

Основной частотой колебания мембраны, натянутой на область  $\Omega$ , называется такая наименьшая положительная постоянная  $\lambda(\Omega)$ , что существует нетривиальное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta v + \lambda(\Omega)v = 0 \text{ в } \Omega, \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Укажем некоторые полезные факты.

Конформный радиус связан с  $\rho(z, \Omega)$  следующим двойным неравенством:

$$\rho(z, \Omega) \leq R(z, \Omega) \leq 4\rho(z, \Omega). \quad (1.5)$$

При этом в первом неравенстве равенство достигается только для круга в его центре, а во втором – для плоскости с разрезом по лучу в точках, лежащих на продолжении луча (см. в [3] или [4] теорему Кебе об  $1/4$ ).

Имеет место следующее двойное неравенство:

$$\rho(\Omega) \leq \mathbf{R}(\Omega) < 2\rho(\Omega). \quad (1.6)$$

В первом неравенстве снова единственной экстремалью является круг. Второе (правое) неравенство связано с определением однолистной константы Блоха – Ландау, постоянная в этом неравенстве не является наилучшей из возможных.

Всюду далее, выполняя операции с функционалами области и с функциями, определенными в области, мы не будем разрывать обозначение величины и аргумент. В основном это касается операции возведения в степень, например,

$$\rho(z, \Omega)^2 := (\rho(z, \Omega))^2, \quad \mathbf{R}(\Omega)^n := (\mathbf{R}(\Omega))^n.$$

Если степень имеет более сложный вид, то преимущества такого обозначения очевидны.

Конформным моментом инерции односвязной области называется следующий геометрический функционал:

$$\mathbf{I}_c(\Omega) := \iint_{\Omega} \mathbf{R}(z, \Omega)^2 dA. \quad (1.7)$$

Аналогично при помощи функции  $\rho(z, \Omega)$  определяется евклидов момент инерции области. Эти величины введены в работах [5] и [6].

Методами комплексного анализа с применением леммы Шварца (см., например, [3]), можно доказать монотонность конформного радиуса как функции области. Имеется в виду следующее свойство: пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – односвязные области, такие, что  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ; тогда  $\mathbf{R}(z, \Omega_1) \leq \mathbf{R}(z, \Omega_2)$  для любого  $z \in \Omega_1$ . Тогда очевидна и монотонность функционала  $\mathbf{I}_c(\Omega)$  относительно области, т. е. свойство  $\mathbf{I}_c(\Omega_1) \leq \mathbf{I}_c(\Omega_2)$ .

Далее отметим, что функция напряжения определяется единственным образом. Проиллюстрируем определения функции напряжения и жесткости кручения области на примере единичного круга. Заметим, что лапласиан функции  $x^2 + y^2$  принимает постоянное значение во всей плоскости, а сама функция принимает постоянное значение на границе круга  $\mathbb{D}$ . Поэтому будем искать функцию напряжения в форме  $u(z, \mathbb{D}) = c(1 - x^2 - y^2)$ , где  $c$  – некоторая постоянная. Таким образом, граничное условие выполняется автоматически, а константу  $c$  определим из дифференциального уравнения (1.3):  $c = 1/2$ . Теперь нетрудно вычислить и жесткость кручения:  $\mathbf{P}(\mathbb{D}) = \pi/2$ .



Все приведенные в этом параграфе неравенства нуждаются в строгом математическом обосновании. Для подробного изучения приведенных выше неравенств можно воспользоваться монографиями [1]–[7].

**Упражнение 1.** Вычислить введенные в первом параграфе величины для круга  $D$  радиуса  $r$ .

**Упражнение 2.** Вычислить введенные в первом параграфе величины для полукруга радиуса  $r$ .

**Упражнение 3.** Установить изопериметрическое неравенство между  $\rho(\Omega)$  и  $A(\Omega)$ . Возможно ли поменять знак неравенства на обратный с некоторой другой константой?

**Упражнение 4.** Установить изопериметрическое неравенство между  $\rho(\Omega)$  и  $I_c(\Omega)$ . Возможно ли неравенство с противоположным знаком?

**Упражнение 5.** Привести примеры классов областей, для которых имеет место противоположное неравенство в упражнениях 3 и 4.

**Упражнение 6.** Вычислить функцию напряжения и жесткость кручения для эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ .

## 1.2 Изопериметрические неравенства и двусторонние оценки

Известное ещё древним грекам неравенство

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\Omega)^2}{4\pi}$$

сейчас принято называть *классическим изопериметрическим неравенством*. Любое подобное неравенство, связывающее два функционала области, в математической физике принято называть изопериметрическим неравенством. Именно в таком широком смысле мы будем употреблять термин “изопериметрическое неравенство”.

Физические функционалы, определяемые посредством решений краевой задачи, являются трудно вычислимыми величинами, за исключением некоторых простых случаев. Поэтому актуальным является изучение их свойств, в частности, получение оценок для них через более простые характеристики области. Основы этой тематики были заложены в работах лорда Рэлея, В. Сен-Венана и А. Пуанкаре, с одной стороны, и Г. Фабера и Е. Крана, Г. Поля и Г. Сегё, с другой.

Одним из результатов исследований В. Сен-Венана является следующая знаменитая гипотеза: при заданной площади поперечного сечения круговое сечение имеет максимальную жесткость кручения (см. [1], [8]). Гипотеза была доказана Г. Полюа в середине XX века. Этот результат уже позволяет делать некоторые оценки жесткости кручения для конкретной области.

Наибольший интерес для нас представляют геометрические функционалы, позволяющие с двух сторон оценить физический функционал области. Два функционала  $F(\Omega)$  и  $F_0(\Omega)$  будем называть эквивалентными на некотором классе областей, если существуют положительные постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , такие, что для любой области  $\Omega$  из этого класса

$$c_1 F_0(\Omega) \leq F(\Omega) \leq c_2 F_0(\Omega).$$

В монографии [1] простыми геометрическими выкладками была установлена эквивалентность ряда функционалов в классе выпуклых областей. Большую сложность представляют оценки в более широком классе односвязных областей.

Е. Макай было установлено (см. [9]), что первая основная частота колебания мембраны эквивалентна  $\rho^{-2}(\Omega)$  в классе односвязных областей. К настоящему времени построено много различных доказательств этого факта (см. [8], [10]).

Более богатую историю имеет задача о двусторонней оценке жесткости кручения. Начиная с XVIII века, было предложено большое число приближенных формул для жесткости кручения (т. е. некоторые комбинации известных геометрических функционалов), эти формулы связаны с именами Рэлея, Коши, Сен-Венана и других. В монографии [1] показано, что эти формулы эквивалентны жесткости кручения в классе выпуклых областей. В 1995 году Ф. Г. Авхадиевым было установлено (см. [6]), что в классе односвязных областей жесткость кручения эквивалентна более сложным геометрическим характеристикам — конформному и евклидовому моментам инерции области относительно границы. В частности, доказано, что известные формулы не дают хорошего приближения для жесткости кручения в классе односвязных областей.

Отметим, что с указанными выше примерами связано много нерешенных задач. Например, задача определения точных констант в изопериметрических неравенствах, упомянутых выше (этот вопрос актуален в некоторых неравенствах и в классе выпуклых областей). Другой нерешенной проблемой является обобщение результатов на двусвязные и многосвязные области.

Ниже мы увидим, что многие эквивалентные функционалы обладают одинаковыми изопериметрическими свойствами. Таким образом, эквивалентность функционалов имеет более глубокий характер, чем то простое неравенство из определения эквивалентности.

### 1.3 Представление конформного момента инерции через коэффициенты отображающей функции

Аналитическую в круге  $\mathbb{D}$  функцию  $z(\zeta)$ , конформно отображающую единичный круг на область  $\Omega$ , можно представить рядом Тейлора (см. [7]). Пусть

$$z(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad |\zeta| < 1. \quad (1.8)$$

Перемножая ряды для  $z'(\zeta)$  по Коши, т. е. собирая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$(z'(\zeta))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \zeta^{n-2}, \quad (1.9)$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) a_k a_{n-k}.$$

Подставляя (1.1) в (1.7) и учитывая, что  $dA = |z'(\zeta)|^2 d\xi d\eta$ , получаем

$$\iint_{\Omega} R(z, \Omega)^2 dA = \iint_D |z'(\zeta)|^4 (1 - |\zeta|^2)^2 d\xi d\eta, \quad (1.10)$$

где  $\zeta = \xi + i\eta$ . Перейдем теперь в последнем интеграле к полярным координатам, полагая  $\zeta = re^{i\theta}$ . Далее, учитывая (1.9), после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_c(\Omega) &= \iint_D \left| (z'(re^{i\theta}))^2 \right|^2 (1 - r^2)^2 r dr d\theta = \\ &= \int_0^1 (1 - r^2)^2 r \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^{n-2} e^{i\theta(n-2)} \right|^2 d\theta dr = \\ &= \int_0^1 (1 - r^2)^2 r \int_0^{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} A_n \overline{A_l} r^{n+l-4} e^{i\theta(n-l)} d\theta dr. \end{aligned}$$

В силу соотношений ортогональности

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-il\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & n = l; \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad (1.11)$$

после интегрирования по  $\theta$  в последнем выражении для  $\mathbf{I}_c(\Omega)$  останутся только слагаемые при  $n = l$ . Оставшийся интеграл по  $r$  выражается через бета-функцию Эйлера:

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} |A_n|^2 \int_0^1 (1-r^2)^2 r^{2n-3} dr = \pi \sum_{n=2}^{\infty} |A_n|^2 B(3, n-1).$$

Окончательно конформный момент инерции с учетом обозначения  $A_n$  запишется следующим образом:

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left| \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) a_k a_{n-k} \right|^2}{(n-1)n(n+1)}. \quad (1.12)$$

## 1.4 Два изопериметрических неравенства для конформного момента инерции

Следующий вспомогательный результат интуитивно очевиден в силу неравенств (1.5). Строгое доказательство утверждения принадлежит Ф. Г. Авахадиеву, более общий результат будет доказан в параграфе 1.10.

**Лемма 1.** *Если  $\mathbf{I}_c(\Omega) < \infty$ , то существует точка  $z_0 \in \Omega$  такая, что*

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{R}(z_0, \Omega),$$

*т. е. в этом случае в определении  $\mathbf{R}(\Omega)$  супремум можно заменить на максимум.*

**Доказательство.** Покажем вначале, что  $\mathbf{R}(\Omega) < \infty$ . Действительно, используя монотонное поведение конформного момента инерции относительно области и неравенство (1.6), получаем

$$\mathbf{I}_c(\Omega) \geq \mathbf{I}_c(\mathbb{D}_{\rho(\Omega)}) = \frac{\pi}{3} \rho(\Omega)^4 \geq \frac{\pi}{48} \mathbf{R}(\Omega)^4.$$

В силу (1.5) супремум  $\mathbf{R}(z, \Omega)$  не может достигаться в любой конечной граничной точке области. Однако существуют области, содержащие на

своей границе бесконечно удаленную точку, в которой достигает супремума конформный радиус (см. пример 4 на стр. 23). С другой стороны, существуют области, содержащие на своей границе бесконечность, для которых  $\mathbf{I}_c(\Omega) < \infty$  (см. пример 7 на стр. 32). Докажем, что оба этих случая одновременно реализоваться не могут.

Пусть бесконечно удаленная точка является граничной точкой области  $\Omega$ . Предположим, что супремум конформного радиуса достигается в бесконечно удаленной точке. Докажем в этом случае утверждение леммы от противного.

Пусть  $M = \sup \{R(z, \Omega) : z \in \Omega\}$ . По определению супремума существует последовательность  $z_n \rightarrow \infty$  ( $z_n \in \Omega$ ) такая, что

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n, \Omega).$$

Из определения непосредственно следует, что найдется подпоследовательность  $\{z_{n_k}\}$  такая, что  $R(z_{n_k}, \Omega) > M/2$ . Тогда из цепочки неравенств

$$\rho(z_{n_k}, \Omega) \geq \frac{1}{4}R(z_{n_k}, \Omega) > \frac{M}{8}$$

следует, что круги  $D_k = \{z : |z - z_{n_k}| < M/8\}$  лежат в  $\Omega$  (см. (1.6)). Так как  $z_{n_k} \rightarrow \infty$ , тогда из множества кругов  $\{D_k\}$  можно выбрать бесконечное число непересекающихся кругов  $\{D_{k_l}\}$ . Но тогда, используя монотонность функционала  $\mathbf{I}_c(\Omega)$  относительно области, получаем

$$\mathbf{I}_c(\Omega) > \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{I}_c(D_{k_l}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi}{3} \left(\frac{M}{8}\right)^4 = \infty.$$

Это противоречие и завершает доказательство леммы.

Очевидно, что функционалы, входящие в неравенство обязаны быть сравнимыми, поэтому, например, в классическом изопериметрическом неравенстве площадь сравнивается именно с квадратом длины границы области. Конформный момент инерции является геометрическим функционалом, имеющий четвертую размерность длины. Простейшими функционалами, связанные с конформным отображением области, являются  $\mathbf{R}(\Omega)$  (единичной размерности длины) и площадь области. Для сравнения этих функционалов с  $\mathbf{I}_c(\Omega)$  можно возвести их в соответствующую степень. Основные результаты последующих двух утверждений можно проанализировать на основании таблиц представленных на страницах 92 и 93.

Теперь выведем одно простое следствие из полученного представления конформного момента инерции.

Выпишем первые члены разложения (1.12):

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = 2\pi \left( \frac{|a_1|^4}{6} + \frac{16|a_1a_2|^2}{24} + \frac{4|3a_1a_3 + 2a_2^2|^2}{60} + \dots \right).$$

Таким образом, получим неравенство

$$\frac{\pi}{3} |a_1|^4 \leq \mathbf{I}_c(\Omega),$$

причем равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда  $a_i = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots$  (в этом легко убедиться, например, по индукции), т. е. из (1.8) следует, что равенство возможно тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг. Далее, по теореме Римана конформное отображение определяется с точностью до трех действительных параметров. В частности, мы можем считать, что образом точки  $\zeta = 0$  является произвольная точка  $z \in \Omega$ . Тогда из (1.1) следует, что  $|a_1| = |z'(0)| = \mathbf{R}(z, \Omega)$ . Применим лемму 1 и выберем точку  $z \in \Omega$  в которой конформный радиус достигает своего максимума. Тогда получим следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  – односвязная область такая, что  $\mathbf{I}_c(\Omega) < \infty$ . Тогда имеет место неравенство

$$\frac{\pi}{3} \mathbf{R}(\Omega)^4 \leq \mathbf{I}_c(\Omega),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.

Далее, используя представление (1.12), установим изопериметрическое неравенство между конформным моментом инерции и площадью области.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega$  – односвязная область конечной площади. Тогда имеет место неравенство

$$\mathbf{I}_c(\Omega) \leq \frac{\mathbf{A}(\Omega)^2}{3\pi},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.

**Доказательство.** Прежде всего получим выражение площади области через коэффициенты отображающей функции.

По определению имеем

$$\mathbf{A}(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \iint_D |z'(\zeta)|^2 d\xi d\eta.$$

Переходя к полярным координатам в последнем интеграле и используя (1.8), (1.11), легко получить хорошо известную формулу

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\Omega) &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i\theta(n-1)} \right|^2 d\theta = \\
 &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} n l a_n \bar{a}_l r^{n+l-2} e^{i\theta(n-l)} d\theta = \\
 &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Перемножив ряды по Коши, выразим квадрат площади формулой

$$\mathbf{A}(\Omega)^2 = \pi^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l) |a_l a_{n-l}|^2. \tag{1.14}$$

Таким образом, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно показать, что сумма ряда (1.12) не превосходит суммы ряда (1.14) для произвольных, в общем случае комплексных, коэффициентов.

Применим к  $|A_n|^2$  неравенство Коши – Буняковского

$$\left| \sum w \bar{u} \right|^2 \leq \sum |w|^2 \sum |\bar{u}|^2, \tag{1.15}$$

где  $w, u$  – некоторые векторы одинаковой размерности, суммы берутся по всем компонентам векторов. Известно, что равенство в (1.15) возможно тогда и только тогда, когда векторы  $w$  и  $u$  коллинеарны, т. е. если  $u$  не нуль-вектор, то выполняется условие

$$w = cu, \tag{1.16}$$

где  $c$  – некоторая фиксированная постоянная. В нашем случае положим

$$w_l = \sqrt{l(n-l)}, \quad u_l = \sqrt{l(n-l)} a_l a_{n-l}, \quad l = \overline{1, n-1}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l) a_l a_{n-l} \right|^2 \leq \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l) |a_l a_{n-l}|^2 \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l). \tag{1.17}$$

Покажем, что для любых  $n \geq 2$  имеет место равенство

$$\sum_{l=1}^{n-1} l(n-l) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

В этом легко убедиться, применив, например, метод математической индукции.

Действительно, для  $n = 2$  равенство очевидно. Предположив, что оно выполняется для  $n$ , докажем формулу для  $(n+1)$ . Имеем

$$\sum_{l=1}^n l(n-l+1) = \sum_{l=1}^n l(n-l) + \sum_{l=1}^n l.$$

Заметим, что в первой сумме правой части слагаемое при  $l = n$  обращается в нуль. К этой сумме применим индукционное предположение. Используя известную формулу для вычисления второй суммы, окончательно получим

$$\sum_{l=1}^n l(n-l+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Подставляя неравенство (1.17) в (1.12) и используя доказанное равенство, получаем

$$\mathbf{I}_c(\Omega) \leq \frac{\pi}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l) |a_l a_{n-l}|^2.$$

Из последнего неравенства с учетом формулы (1.14) следует основное неравенство теоремы.

Для завершения доказательства осталось изучить случаи равенства. Они сводятся к требованию равенства в неравенстве (1.17). Причем равенства должны выполняться для произвольного  $n \in \mathbb{N}$ . В силу неравенства Коши – Буняковского равенство возможно тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.16). В нашем случае это условие примет вид:

$$c_n \sqrt{l(n-l)} = \sqrt{l(n-l)} a_l a_{n-l}, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $c_n$  — некоторые комплексные числа. После очевидных сокращений приводит к следующей задаче: определить все функции, аналитические в единичном круге, коэффициенты разложения в ряд Маклорена которых удовлетворяют равенствам

$$a_l a_{n-l} = c_n.$$

В частности, при  $l = 1, 2$ , получим

$$a_1 a_{n-1} = c_n, \quad a_2 a_{n-2} = c_n. \quad (1.18)$$



Отсюда следует, что

$$a_n = a_1 \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1} = a_1 q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $q = a_2/a_1$ . В силу разложения (1.8) отображающая функция примет вид

$$z(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_1 q \zeta^2 + \dots = a_0 + \frac{a_1 \zeta}{1 - q \zeta}. \quad (1.19)$$

Последняя функция является общим отображением единичного круга  $\zeta$ -плоскости на некоторый круг  $z$ -плоскости. Этим завершается доказательство теоремы.

Простым следствием теоремы 2 является оценка для евклидового момента инерции области относительно границы.

*Следствие 1.* Пусть  $\Omega$  – односвязная область конечной площади  $\mathbf{A}(\Omega)$ , тогда имеет место строгое неравенство

$$\iint_{\Omega} \rho(z, \Omega)^2 dA < \frac{\mathbf{A}(\Omega)^2}{3\pi}.$$

Действительно, неравенство является следствием поточечного неравенства (1.5). То, что неравенство будет строгим, следует из того, что оно не достигается для круга, а также из того факта, что в применяемом неравенстве (1.5) круг является единственной экстремалью.

Из доказательства теоремы 2 непосредственным вытекает

*Следствие 2.* Для областей с ограниченной площадью разложение конформного момента инерции (1.12) является абсолютно сходящимся рядом относительно коэффициентов отображающей функции  $z(\zeta)$ .

**Упражнение 7.** Доказать существование оценки сверху отношения  $\mathbf{I}_c(\Omega) / \mathbf{A}(\Omega)^2$ , не прибегая к результатам параграфа 1.3.

**Упражнение 8.** Получить двусторонние оценки для  $\mathbf{I}_c(\Omega)$ , где область  $\Omega$ : 1) квадрат со стороной  $a$ ; 2) полукруг радиуса  $r$ ; 3) эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ ; 4) ромб со стороной  $a$  и острым углом  $30^\circ$ .

**Упражнение 9.** Показать, что неравенство упражнения 3 можно получить как следствие двух других изопериметрических неравенств.

**Упражнение 10.** Записать двумя различными способами в виде неравенств, следующие утверждения: 1) “среди всех треугольников заданной площади равносторонний треугольник имеет максимальный супремум конформного радиуса”; 2) “среди всех четырехугольников заданной площади квадрат имеет максимальный конформный момент инерции”. Доказать эквивалентность этих неравенств.

## 1.5 Простейшие примеры вычисления функционалов

Проиллюстрируем утверждения предыдущего параграфа примерами.

**Пример 1.**  $\Omega (= \mathbb{D}_r)$  – круг радиуса  $r$ .

В данном примере можно предложить много способов вычисления функционалов. В этом смысле круг является наиболее простой областью. Например, для вычисления функционалов мы можем применить сначала теорему 2, затем теорему 1. Получим

$$\mathbf{I}_c(\mathbb{D}_r) = \frac{\pi}{3} r^4, \quad \mathbf{R}(\mathbb{D}_r) = r.$$

Вычисление конформных функционалов области представляет собой самостоятельную задачу. Например, достаточно сложно охарактеризовать точку области, где достигается максимум конформного радиуса. В общем случае, как будет видно из примеров, эта точка не обязательно совпадает с центром максимального круга, вписанного в область, даже для областей с простой геометрией.

Для широкого класса областей задачу вычисления  $\mathbf{R}(\Omega)$  существенно упрощает следующее утверждение (см. [1]), связанное с геометрической операцией, придуманной Якобом Штейнером.

Напомним, что симметризация Штейнера плоской области также называется симметризацией относительно прямой и суть ее заключается в следующем: исходной области ставится в соответствие другая область, симметричная относительно фиксированной прямой, так, что если прямая перпендикулярная к фиксированной прямой пересекает одну область, то она пересекает и другую область тоже, а линейные размеры пересечения прямой одной области и другой совпадают. Оказалось, что эта простая операция обладает целым рядом замечательных свойств, одним из примеров таких свойств является

**Теорема 3.** *Пусть односвязная область  $\Omega$  не изменяется при симметризации Штейнера относительно некоторой прямой. Тогда на прямой существует точка, где конформный радиус достигает своего максимума.*

Теорема 3 является следствием того факта, что конформный радиус в точке не уменьшается при симметризации Штейнера (для точной формулировки данного свойства требуются понятия которые будут определены далее), т. е. при симметризации области относительно прямой.

Отметим, что если таких прямых, указанных в теореме, более одной, то максимум будет достигаться в точке их пересечения. Например, в случае

эллипса максимум достигается в точке пересечения полуосей. Пример полосы также показывает, что точка максимума может быть не единственной (для полосы максимум достигается на целой прямой, т. е. множество точек максимума имеет мощность континуума).

Далее, заметим, что вычисление конформного момента инерции связано с трудностями вычисления интегралов, однако эту трудность можно и обойти, если воспользоваться разложением (1.12). Но тогда придется столкнуться с проблемой вычисления коэффициентов  $a_k$ . В обоих случаях необходимо построить конформное отображение области на круг или обратное к нему отображение.

**Пример 2.**  $\Omega(= \blacktriangle)^2$  – равносторонний треугольник со стороной  $a$ .

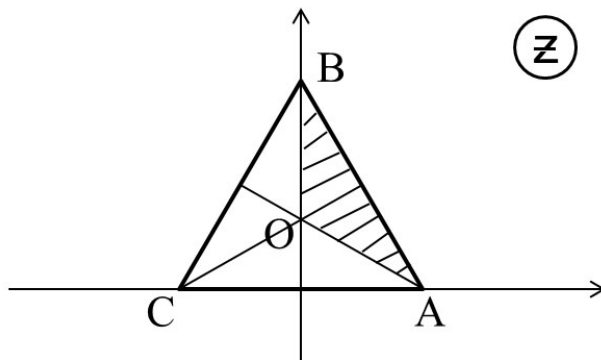


Рис. 1.1: Равносторонний треугольник со стороной  $a$

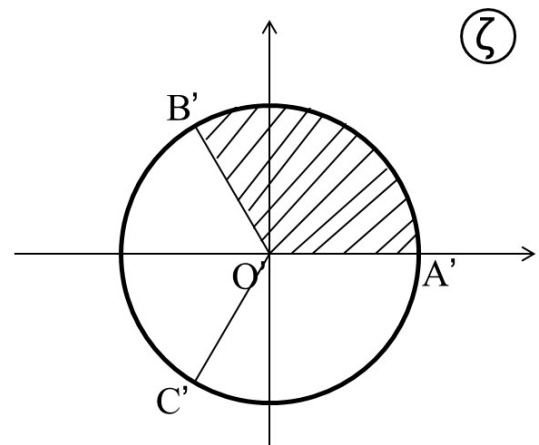


Рис. 1.2: Вспомогательная плоскость

Эта область имеет три оси симметрии, которые совпадают с биссектрисами треугольника. Таким образом, в центре вписанного круга (точка  $O$ ) по предыдущей теореме достигается и максимум конформного радиуса. Конформное отображение в данном случае строится стандартным образом при помощи продолжения по симметрии Римана – Шварца.

Биссектрисами разобьем треугольник на три равные части, а единичный круг поделим на три равных круговых сектора. Отобразим вначале треугольник  $OAB$  на сектант  $O'A'B'$  (см. рис. 1.1 и рис. 1.2).

Применив продолжение по симметрии, получим отображение треугольника на единичный круг  $\mathbb{D}$ , при этом  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ,  $C \rightarrow C'$  и  $O \rightarrow O'$ . Из формулы Кристоффеля – Шварца получаем, что отображение

<sup>2</sup>Здесь и далее используются некоторые понятные и удобные обозначения областей.

имеет вид

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= c \int_0^\zeta \frac{dt}{[(t-1)(t-e^{2\pi i/3})(t-e^{-2\pi i/3})]^{2/3}} + \frac{ia}{2\sqrt{3}} = \\ &= c_1 \int_0^\zeta \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}} + \frac{ia}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{R}(O, \Omega) = \mathbf{R}(z(0), \mathbb{D}) = |z'(0)| = |c_1|.$$

Для определения константы можно воспользоваться условием

$$a = \left| z(e^{2\pi i/3}) - z(1) \right| = \left| c_1 \int_1^{e^{2\pi i/3}} \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}} \right|.$$

Последний интеграл берется по дуге  $A'B'$ . Сделав в нем замену  $t = e^{i\varphi}$ , получим

$$a = \frac{2^{4/3}c}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{1/3-1} d\varphi = \frac{2^{1/3}\sqrt{\pi}c\Gamma(1/6)}{3\Gamma(2/3)}.$$

Осталось применить формулы дополнения и удвоения для гамма-функции. Таким образом, для равностороннего треугольника со стороной  $a$

$$\mathbf{R}(\blacktriangle) = \frac{2\pi a}{[\Gamma(1/3)]^3} (\cong 0.326807 a).$$

Отметим, что  $\rho(\blacktriangle) = a/2\sqrt{3} (\cong 0.288675 a)$ .

Для вычисления конформного момента инерции воспользуемся формулой (1.12). Действительно, разложив подинтегральную функцию в ряд Тейлора, представим отображающую функцию в виде ряда

$$z(\zeta) = \frac{ia}{2\sqrt{3}} + \frac{i\mathbf{R}(\blacktriangle)}{\Gamma(2/3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/3)}{(n-1)!(3n-2)} \zeta^{3n-2}.$$

Заметим, что  $a_k a_{n-k} \neq 0$  тогда и только тогда, когда индексы коэффициентов отображающей функции представимы в виде

$$k = 3k_1 - 2, \quad n - k = n - (3k_1 - 2) = 3k_2 - 2,$$

где  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ . Следовательно,  $n = 3(k_1 + k_2) - 4 = 3n_1 - 4$ . В представлении (1.12) для конформного момента инерции введем новые индексы суммирования  $n_1$  и  $k_1$ . Отметим, что  $k_1 = \overline{1}$ ,  $n_1 = \overline{1}$ . Отсюда легко получим следующую формулу для равностороннего треугольника:

$$\mathbf{I}_c(\blacktriangle) = \frac{2\pi \mathbf{R}(\blacktriangle)^4}{\Gamma(2/3)^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k-1/3)\Gamma(n-k-1/3)}{(k-1)!(n-k-1)!} \right)^2}{(3n-5)(3n-4)(3n-3)}. \quad (1.20)$$

Сумма последнего ряда выражается через сумму трех обобщенных гипергеометрических функций. В дальнейшем будет показано, что внутренняя сумма может быть выражена в явном виде.

Приведем приближенные значения:

$$\mathbf{I}_c(\blacktriangle) \cong 1.21719 \mathbf{R}(\blacktriangle)^4 = 0.0138837 a^4.$$

С помощью проделанных вычислений проиллюстрируем теоремы предыдущего параграфа на примере конформного момента инерции. Очевидна следующая грубая оценка:

$$\mathbf{I}_c(\blacktriangle) \leq \mathbf{R}(\blacktriangle)^2 \mathbf{A}(\blacktriangle) = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{\Gamma(1/3)^6} a^4 \cong 0.046247 a^4.$$

С другой стороны, теоремы 1 и 2 дают двустороннюю оценку

$$0.0119452 a^4 < \mathbf{I}_2(\blacktriangle) < 0.0198944 a^4.$$

**Пример 3.**  $\Omega$  – полукруг радиуса  $a$ .

В данном примере целесообразно построить отображение полукруга на единичный круг. Положим вначале  $a = 1$ . Искомое отображение будем строить как композицию функции Жуковского и дробно-линейного отображения, т. е.

$$\zeta(z) = z_2(z_1(z)),$$

где  $z_1 = (z + z^{-1})/2$  отображает  $\Omega$  на нижнюю полуплоскость, а

$$z_2 = e^{i\alpha} \frac{z_1 + b}{z_1 + \bar{b}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(b) > 0)$$

отображает нижнюю полуплоскость на единичный круг. Если дополнительно положить, что  $\zeta(i/2) = 0$ , то  $\alpha = 0$ ,  $b = 3i/4$ . Окончательно отображение примет вид

$$\zeta(z) = \frac{2z^2 + 3iz + 2}{2z^2 - 3iz + 2}.$$

Подставим  $\zeta(z)$  в (1.2). Получим

$$R(z, \Omega) = \frac{i(\bar{z} - z)(1 - |z|^2)}{|1 - z^2|}.$$

По теореме 3 максимум конформного радиуса будет достигаться на мнимой оси. Таким образом,

$$R(\Omega) = \max_{h \in (0,1)} R(ih, \Omega) = \max_{h \in (0,1)} \frac{2h(1 - h^2)}{1 + h^2}.$$

Стандартные вычисления показывают, что максимум будет достигаться при  $h = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$  ( $< 0.5$ ), и  $R(\Omega) = 0.600566$  ( $> 0.6 = R(i/2, \Omega)$ ). Таким образом, для полукруга точки, где достигают максимума  $\rho(z, \Omega)$  и  $R(z, \Omega)$ , не совпадают. Случай произвольного  $a$  сводится к рассмотренному предварительным отображением  $z \mapsto z/a$ , что приводит к умножению на  $a$  уже полученного результата.

Вычислим конформный момент инерции, исходя из определения:

$$\begin{aligned} I_c(\Omega) &= a^2 \int_0^\pi \int_0^a \frac{(1 - |\zeta(re^{i\theta}/a)|^2)^2}{|\zeta'(re^{i\theta}/a)|^2} r dr d\theta \\ &= a^4 \int_0^\pi \int_0^1 \frac{(1 - |\zeta(re^{i\theta})|^2)^2}{|\zeta'(re^{i\theta})|^2} r dr d\theta. \end{aligned}$$

Подставив выражение для конформного радиуса, получим окончательно

$$I_c(\Omega) = 4a^4 \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r^3 (1 - r^2)^2 \sin^2 \theta}{1 - 2r^2 \cos(2\theta) + r^4} dr d\theta.$$

Для вычисления последнего интеграла наиболее естественно воспользоваться рядами Фурье. Действительно, зная разложение в ряды Фурье

$$\begin{aligned} \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos \varphi + q^2} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n\varphi), \\ \frac{1 - q \cos \varphi}{1 - 2q \cos \varphi + q^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n\varphi), \end{aligned}$$

нетрудно получить

$$2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 - 2\rho \cos(2\theta) + \rho^2} = \frac{\pi}{\rho + 1}.$$

Подставляя полученное равенство в  $\mathbf{I}_c(\Omega)$ , окончательно будем иметь

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \pi a^4 \left( \frac{17}{6} - 4 \ln 2 \right) (\cong 0.190835 a^4).$$

В данном случае теоремы 1 и 2 дают следующие оценки

$$0.13623 a^4 < \mathbf{I}_c(\Omega) < 0.261799 a^4.$$

**Пример 4.**  $\Omega$  – полуполоса ширины  $h$ .

Полуполосу можно рассматривать как вырожденный треугольник, у которого один угол нулевой. Следовательно, для построения отображающей функции можно воспользоваться методом, примененным в примере 2.

В данном примере целесообразно воспользоваться другим методом. Для этого введем вспомогательную область  $\mathbb{H}$ , где  $\mathbb{H}$  – верхняя полуплоскость плоскости  $\omega$ . Пусть основание полуполосы располагается на действительной оси, симметрично относительно мнимой оси  $z$ -плоскости и полуполоса направлена вверх.

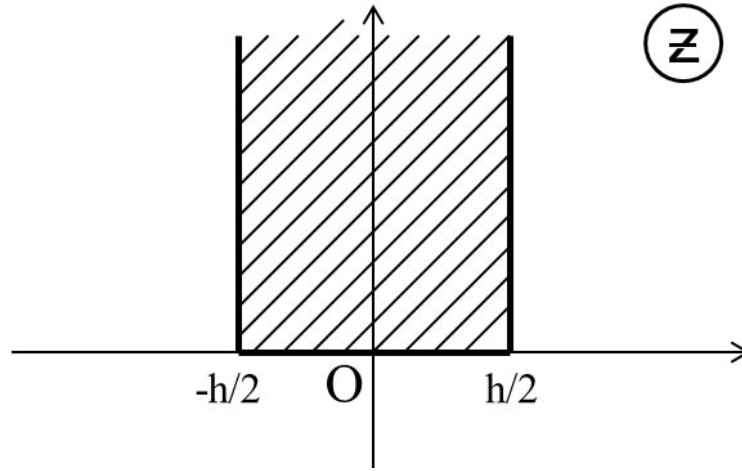


Рис. 1.3: Полуполоса ширины  $h$

Тогда отображение области  $\Omega$  на  $\mathbb{H}$  имеет вид

$$\omega(z) = \sin \frac{\pi z}{h}.$$

С другой стороны, применив принцип симметрии для дробно-линейных отображений, отображение полуплоскости на единичный круг запишем в виде

$$\zeta(\omega) = \frac{\omega - i}{\omega + i}. \quad (1.21)$$

Искомое отображение есть композиция

$$\zeta(z) = \frac{\sin(\pi z/h) - i}{\sin(\pi z/h) + i}.$$

Подставив отображающую функцию в (1.2), получим

$$R(z, \Omega) = \frac{h}{\pi} \frac{i(\sin(\pi \bar{z}/h) - \sin(\pi z/h))}{|\cos(\pi z/h)|}.$$

Отсюда, с применением тригонометрических тождеств, нетрудно вывести, что

$$R(z, \Omega) = \frac{2h}{\pi \sqrt{\tan^2(\pi x/h) + \coth^2(\pi y/h)}},$$

где  $z = x + iy$ . Из последнего представления вытекает, что конформный радиус обращается в ноль на границе.

По теореме 3 точки максимума конформного радиуса находятся на мнимой оси. Для точек мнимой оси конформный радиус имеет наиболее простой вид

$$R(it, \Omega) = \frac{2h}{\pi} \operatorname{th} \left( \frac{\pi t}{h} \right),$$

где  $t \in [0, +\infty]$ . Таким образом,  $R(\Omega) = 2h/\pi$  и максимум достигается в бесконечно удаленной точке. Отметим, что бесконечно удаленная точка является граничной точкой области, следовательно условия леммы 1 не выполнены.

Отметим, что во всех предыдущих примерах области имели единственную точку максимума конформного радиуса и единственную точку максимума функции расстояния до границы области. Полуполоса является интересным примером области, которая имеет единственную точку максимума конформного радиуса и континуум точек максимума функции расстояния до границы. Напомним, что рассматриваемые функционалы связаны двухсторонним неравенством (1.6).

Из леммы 1 и результатов вычисления следует, что  $I_c(\Omega) = \infty$ . Следовательно, в данном примере теорема 1 утверждает всего лишь неравенство  $R(\Omega) < \infty$ .

**Пример 5.**  $\Omega (= \mathbb{S})$  – полоса ширины  $h$ .

Из предыдущего примера и свойства монотонности функционала  $I_c(\mathbb{S})$  как функции области немедленно следует, что  $I_c(\mathbb{S}) = \infty$ .

Далее, по теореме 3 точки максимума конформного радиуса области находятся в каждой средней точке между граничными прямыми и в бесконечно удаленной точке. То, что  $R(\mathbb{S}) < \infty$ , следует, например, из теоремы 1.



Таким образом, полоса имеет континуум точек максимума конформного радиуса, которые совпадают с точками максимума функции расстояния до границы. Остаётся только вычислить точное значение  $\mathbf{R}(\mathbb{S})$ .

Построим конформное отображение единичного круга на полосу, для этого воспользуемся той же вспомогательной плоскостью, что и в предыдущем примере. Пусть одной граничной прямой является действительная ось. Отображение полуплоскости на круг будет совпадать с (1.21), при этом мнимой оси соответствует отрезок  $[-1, 1]$ . Отображение полуплоскости  $\mathbb{H}$  на  $\mathbb{S}$  имеет вид

$$\omega(z) = \exp\left(\frac{\pi z}{h}\right).$$

Исключив переменную  $\omega$ , получим искомое отображение в виде

$$z(\zeta) = \frac{h}{\pi} \ln\left(i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}\right).$$

Ещё более просто получается обратное отображение. Действительно, подставив  $\omega(z)$  в (1.21), получим

$$\zeta(z) = \frac{\exp(\pi z/h) - i}{\exp(\pi z/h) + i}.$$

Из определения конформного радиуса после несложных алгебраических преобразований получим окончательную формулу

$$\mathbf{R}(z, \mathbb{S}) = \frac{2h}{\pi} \sin(\pi \operatorname{Im}(z)/h), \quad (1.22)$$

где  $\operatorname{Im}(z) \in [0, h]$ . Непосредственно видно, что максимум конформного радиуса в данном примере достигается в каждой точке прямой  $z = hi/2$ . Окончательно имеем:  $\mathbf{R}(\mathbb{S}) = 2h/\pi$ .

Сделаем два замечания. На “экстремальной” прямой достигает максимума и функционал  $\rho(\mathbb{S})$ , здесь наблюдается принципиальное отличие полосы от полуполосы. Более того, как и в случае круга, для полосы линии уровня конформного радиуса и функции расстояния до границы области совпадают.

**Упражнение 11.** Найти максимум конформного радиуса и конформный момент инерции для квадрата со стороной  $a$ .

$$\left[ \mathbf{R}(\blacksquare) = 4\sqrt{\pi} (\Gamma(1/4))^{-2} a; \quad \mathbf{I}_c(\blacksquare) = \pi \ln 2 \mathbf{R}(\blacksquare)^4/2 \right]$$

**Упражнение 12.** Вывести общую формулу для  $\mathbf{R}(\Omega_n)$ , где  $\Omega_n$  – правильный равносторонний  $n$ -угольник со стороной  $a$ . Найти предел  $\mathbf{R}(\Omega_n)$  при  $a = 1/n$  и  $n \rightarrow \infty$ .

$$\left[ \mathbf{R}(\Omega_n) = \pi n a \left[ 2 \sin^2(\pi/n) \Gamma^2(1/n) \Gamma(1 - 2/n) \right]^{-1}; \quad (2\pi)^{-1} \right]$$

## 1.6 Другие примеры вычисления функционалов $\mathbf{R}(\Omega)$ и $\mathbf{I}_c(\Omega)$

**Пример 6.** Приведем некоторые формулы для случая, когда область  $\Omega$  является прямоугольником со сторонами  $a, b$  ( $a \geq b$ ).

Прямоугольник имеет не менее двух осей симметрии, следовательно, в точке пересечения осей будет достигаться максимум конформного радиуса.

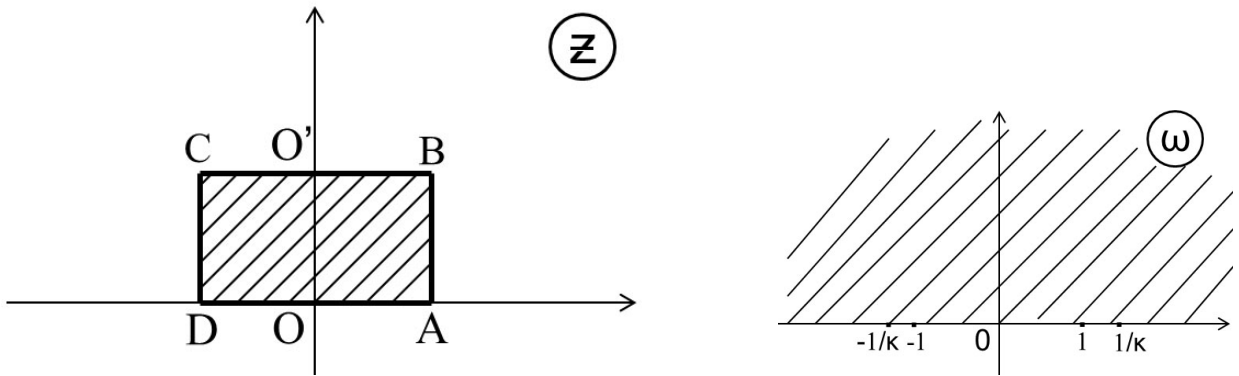


Рис. 1.4: Прямоугольник со сторонами  $a, b$  и вспомогательная полуплоскость

В качестве вспомогательной плоскости в данном случае принято брать верхнюю полуплоскость  $\mathbb{H}$  плоскости  $\omega$ . Поэтому построим при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца конформное отображение верхней полуплоскости на прямоугольник. Пусть прямоугольник  $ABCD$  располагается в верхней полуплоскости, большая сторона лежит на вещественной оси и симметричен относительно мнимой оси. Рассмотрим сначала отображение первого квадранта плоскости  $\omega$  на правую половину прямоугольника с соответствием  $O \rightarrow 0, A \rightarrow 1$  и  $O_1 \rightarrow \infty$ , где  $O_1$  — середина  $BC$ . Пусть  $B \rightarrow 1/\kappa$  ( $0 < \kappa < 1$ ). Продолжая отображение по симметрии через  $OO'$  и положительную часть мнимой полуоси плоскости  $\omega$ , получим, что  $C \rightarrow -1/\kappa$ , а  $D \rightarrow -1$  (см. рис. 1.4).

Таким образом, искомое отображение запишется в виде

$$z(\omega) = C \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)(1 - (\kappa\omega)^2)}}.$$

Для определения констант  $C$  и  $\kappa$  получим соотношения

$$a/2 = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(\kappa t)^2)}} = CK(\kappa),$$

$$b = C \int_1^{1/\kappa} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-(\kappa t)^2)}} = CK(\sqrt{1-\kappa^2}) = CK'(\kappa),$$

где  $K(\kappa)$ ,  $K'(\kappa)$  – полные эллиптические интегралы, соответствующие модулю  $\kappa$  и, так называемому, дополнительному модулю. В справочниках по специальным функциям можно найти явное выражение неизвестных констант через  $a$  и  $b$ , а более точно их отношения (см., например, [?, стр. 612]<sup>3</sup>). В дальнейшем мы будем считать их известными.

Применяя (1.2) и (1.13), можем вычислить конформный радиус для полуплоскости

$$\mathbf{R}(\omega, \mathbb{H}) = \left(1 - \left|\frac{\omega - i}{\omega + i}\right|^2\right) \frac{|\omega + i|^2}{2} = 2\text{Im}(\omega).$$

Для вычисления конформного радиуса прямоугольника воспользуемся свойством конформной инвариантности  $\mathbf{R}(z, \Omega)$ . Действительно, имеет место равенство

$$\frac{|dz|}{\mathbf{R}(z, G_1)} = \frac{|dw|}{\mathbf{R}(w, G_2)}, \quad (1.23)$$

где  $z = z(w)$  – конформное отображение односвязной области  $G_2$  на  $G_1$ . Частным случаем последней формулы является формула (1.1).

Из последних двух равенств выводим

$$\mathbf{R}(z, \Omega) = 2|z'(\omega)|\text{Im}(\omega) = \frac{2|C|\text{Im}(\omega)}{\left|\sqrt{(1-\omega^2)(1-(\kappa\omega)^2)}\right|}.$$

По теореме 3 точка максимума конформного радиуса и её прообраз находятся на мнимой оси. Обычными средствами анализа можно показать, что

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{R}(i/\sqrt{\kappa}, \Omega) = \frac{2|C|}{1+\kappa}. \quad (1.24)$$

<sup>3</sup>В справочнике использован параметр  $m$  вместо параметра  $\kappa$ , связаны они простым соотношением  $m = \kappa^2$ , как нетрудно проверить, при этом отношение  $K/K'$  не зависит от того какой параметр выбран, т. е.  $K(m)/K'(m) = K(\kappa)/K'(\kappa)$ . В нашем примере после нахождения параметра  $m$  придется извлечь из него корень для определения интересующего параметра  $\kappa$ .

Для вычисления конформного момента инерции прямоугольника воспользуемся отображением единичного круга на прямоугольник. Разобьем прямоугольник осями симметрии на четыре равных прямоугольника. Сначала отобразим один из прямоугольников на четверть круга так, чтобы центру круга соответствовала точка пересечения диагоналей, а серединам отрезков граничные точки сектора на действительной и мнимой осях. Тогда оставшаяся вершина прямоугольника перейдет в точку на единичной окружности, обозначим ее через  $e^{i\gamma}$  (см. рис. 1.5). Теперь, продолжая отображения через соответствующие стороны по симметрии, можем определить прообразы оставшихся вершин прямоугольника.

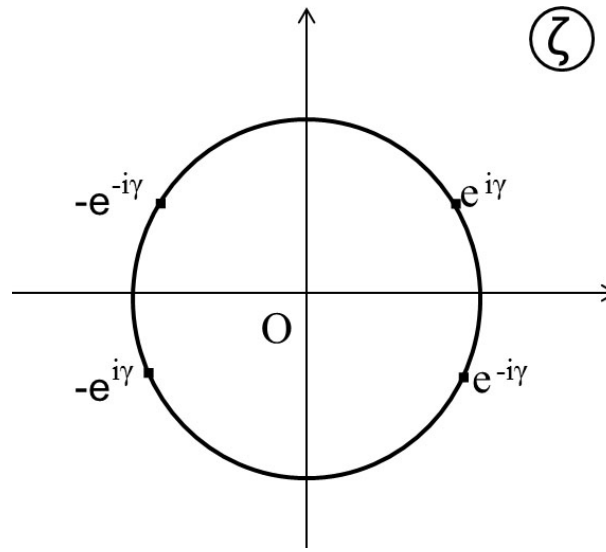


Рис. 1.5: Вспомогательная область — круг единичного радиуса

Окончательно отображение запишется в виде следующего интеграла Кристоффеля – Шварца

$$\begin{aligned}
 z(\zeta) &= C_1 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - (e^{i\gamma}\zeta)^2)(1 - (e^{-i\gamma}\zeta)^2)}} + \frac{ib}{2} = \\
 &= C_1 \int_i^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - (e^{i\gamma}\zeta)^2)(1 - (e^{-i\gamma}\zeta)^2)}}.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Так как прообразом нуля является центр симметрии прямоугольника, т. е. точка, в которой достигается максимум конформного радиуса, отсюда получим, что

$$|C_1| = \frac{2|C|}{1 + \kappa}.$$

Используя ангармоническое отношение, можем найти связь между параметрами  $\kappa$  и  $\gamma$ . Действительно, конформное отображение полуплоскости на круг является дробно-линейным. Составив ангармоническое соотношение так, чтобы прообразы вершин прямоугольника на плоскости и окружности соответствовали друг другу с соблюдением обхода, найдем

$$\frac{1/\kappa + 1/\kappa}{1/\kappa - 1} \cdot \frac{-1 - 1}{-1 + 1/\kappa} = \frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}} \cdot \frac{-e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}}{-e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}},$$

последнее эквивалентно равенству

$$\operatorname{tg}^2(\gamma) = \frac{(1 - \kappa)^2}{4\kappa}.$$

Учитывая пределы изменения  $\kappa$ , определим соотношение между параметрами

$$\sin \gamma = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}, \quad \kappa = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}. \quad (1.26)$$

Например, из симметрии квадрата относительно диагоналей, следует, что для квадрата  $\gamma = \pi/4$ , отсюда  $\kappa = 3 - 2\sqrt{2}$ . Тот же результат можно получить непосредственно, применяя конформные отображения и симметрии.

Более того, можно указать дробно-линейное отображение, которое переводит прообразы вершин прямоугольника друг в друга. Для этого можно воспользоваться ангармоническим соотношением, но проще воспользоваться свойством симметричных точек при дробно-линейном преобразовании. Симметричные относительно мнимой оси точки на единичной окружности перейдут в симметричные точки на действительной оси, т. е. отрезок  $[-i, i]$  перейдет в положительную часть мнимой оси. Таким образом, имеем соответствие  $-i \leftrightarrow 0$ ,  $i \leftrightarrow \infty$  и  $0 \leftrightarrow i/\sqrt{\kappa}$ , последнее соответствие является следствием теоремы 3 и формулы (1.24). В итоге получаем отображение

$$\omega(\zeta) = -\frac{i}{\sqrt{\kappa}} \frac{\zeta + i}{\zeta - i}.$$

Так как построенные конформные отображения определяются единственным образом, должно выполняться равенство  $z(\zeta) = z(\omega(\zeta))$ , отсюда получим равенство

$$C_1 = -\frac{2C}{1 + \kappa}.$$

Вопрос точного выражения константы  $C$  (или  $C_1$ ) через величину сторон прямоугольника  $\Omega$  является классическим вопросом теории эллиптических

интегралов. Поэтому приведем окончательное выражение для максимума конформного радиуса из монографии Г. Поля и Г. Сеге [1]

$$\mathbf{R}(\Omega) = \frac{2}{\pi} b \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \quad q = e^{-\pi a/b} (b \leq a). \quad (1.27)$$

Для вычисления конформного момента инерции применим формулу (1.10) и перейдем к полярным координатам. Получим

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \mathbf{R}(\Omega)^4 \int_0^1 r (1 - r^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi dr}{\left| 1 - (re^{i(\varphi+\gamma)})^2 \right|^2 \left| 1 - (re^{i(\varphi-\gamma)})^2 \right|^2}.$$

Запишем модули в знаменателе дроби, используя комплексное сопряжение, и применим следующее разложение в ряд

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(1 - \zeta)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} \zeta^n \quad (|\zeta| < 1) \quad (1.28)$$

при  $\alpha = 1$ . В результате найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_c(\Omega) = \mathbf{R}(\Omega)^4 \int_0^1 r (1 - r^2)^2 \int_0^{2\pi} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} r^{2(k_1+k_2+k_3+k_4)} \times \\ \times e^{2i((\varphi+\gamma)k_1 - (\varphi+\gamma)k_2 + (\varphi-\gamma)k_3 - (\varphi-\gamma)k_4)} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Далее, применяя формулу (1.11), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_c(\Omega) = 2\pi \mathbf{R}(\Omega)^4 \int_0^1 r (1 - r^2)^2 \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \sum_{k_4}^* r^{2(k_1+k_2+k_3+k_4)} \times \\ \times e^{2i\gamma(k_1 - k_2 - k_3 + k_4)} dr, \end{aligned}$$

здесь символ звездочка означает, что суммирование в четырехкратной сумме ведется не по всем целым неотрицательным индексам  $k_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), а только по индексам, связанным соотношением

$$k_1 + k_3 = k_2 + k_4.$$

Используя последнее соотношение, можно записать сумму со звездочкой как сумму двух трехкратных рядов. Действительно, выражая из соотношения для индексов  $k_4$  и  $k_2$ , получим

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \sum_{k_4}^* r^{2(k_1+k_2+k_3+k_4)} e^{2i\gamma(k_1 - k_2 - k_3 + k_4)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} r^{4(k_1+k_3)} e^{4i\gamma(k_1-k_2)} + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} r^{4(k_1+k_3)} e^{4i\gamma(k_4-k_3)} = \\
&= 2\operatorname{Re} \left( \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} r^{4(k_1+k_3)} e^{4i\gamma(k_1-k_2)} \right) = \\
&= \frac{2}{(1-r^4)} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{(1-(re^{i\gamma})^4)(1-e^{-4i\gamma})} \right).
\end{aligned}$$

Отделяя вещественную часть и подставляя в формулу для конформного момента инерции, получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_c(\Omega) &= 2\pi \mathbf{R}(\Omega)^4 \int_0^1 \frac{r (1-r^2)^2 (1+r^4) dr}{|1-(re^{i\gamma})^4|^2 (1-r^4)} = \\
&= \pi \mathbf{R}(\Omega)^4 \int_0^1 \frac{(1-t)(1+t^2) dt}{(1-t^2 e^{4i\gamma})(1-t^2 e^{-4i\gamma})(1+t)}.
\end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла применим метод разложения подинтегральной функции на простые дроби. Действительно, имеет место представление

$$\begin{aligned}
f(t) &:= \frac{(1-t)(1+t^2)}{(1-t^2 e^{4i\gamma})(1-t^2 e^{-4i\gamma})(1+t)} = \\
&= \frac{A_1}{1-te^{2i\gamma}} + \frac{A_2}{1+te^{2i\gamma}} + \frac{A_3}{1-te^{-2i\gamma}} + \\
&\quad + \frac{A_4}{1+te^{-2i\gamma}} + \frac{A_5}{1+t}.
\end{aligned}$$

Для определения неизвестных констант более эффективно воспользоваться не алгебраическими методами, а методами анализа, которые, вдобавок, минимизируют возможные ошибки вычисления. Например, вычислим здесь один из неизвестных коэффициентов:

$$A_5 = \lim_{t \rightarrow -1} f(t)(t+1) = \frac{4}{(1-e^{4i\gamma})(1-e^{-4i\gamma})} = \frac{1}{\sin^2(2\gamma)}.$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты:

$$A_1 = \frac{e^{2i\gamma}}{8 \cos^2 \gamma}, \quad A_2 = -\frac{e^{2i\gamma}}{8 \sin^2 \gamma}, \quad A_3 = e^{-4i\gamma} A_1, \quad A_4 = e^{-4i\gamma} A_2.$$

Подставим полученное разложение в  $\mathbf{I}_c(\Omega)$  и после интегрирования получим

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \pi \mathbf{R}(\Omega)^4 \left[ \frac{\ln 2}{\sin^2(2\gamma)} - \frac{\ln |1 - e^{2i\gamma}|^2}{8 \cos^2(\gamma)} - \frac{\ln |1 + e^{2i\gamma}|^2}{8 \sin^2(\gamma)} \right].$$

Окончательно получим элегантную формулу для конформного момента инерции прямоугольника

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \frac{\pi \mathbf{R}(\Omega)^4}{4} \ln \left( (\cos \gamma)^{-1/\sin^2 \gamma} (\sin \gamma)^{-1/\cos^2 \gamma} \right).$$

Приведем еще одно полезное выражение для момента инерции

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \frac{\pi \mathbf{R}(\Omega)^4}{\sin(2\gamma)^2} \ln \left( (\cos \gamma)^{-\cos^2 \gamma} (\sin \gamma)^{-\sin^2 \gamma} \right).$$

С помощью последней формулы можно определить асимптотическое поведение конформного момента инерции при  $\gamma \rightarrow 0$ , что соответствует предельному переходу при  $b/a \rightarrow 0$ . Вычисления показывают, что

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \left( \frac{2b}{\pi} \right)^4 \left[ \frac{1}{8} + \frac{\ln(1/\gamma)}{4} + \left( \frac{5}{48} + \frac{\ln(1/\gamma)}{4} \right) \gamma^2 + O(\gamma^4) \right].$$

Рассмотрим один частный случай формулы для конформного момента инерции прямоугольника. Нам уже известно, что в случае, когда область  $\Omega$  совпадает с квадратом,  $\gamma = \pi/4$ . Подставляя в последнюю формулу константу  $\gamma$ , получим

$$\mathbf{I}_c(\blacksquare) = \frac{\pi \mathbf{R}(\blacksquare)^4 \ln 2}{2} = \frac{2(4\pi)^3 \ln 2}{[\Gamma(1/4)]^8} a^4 \cong 0.0921375 a^4.$$

При вычислении  $\mathbf{R}(\blacksquare)$  можно воспользоваться формулой (1.27), однако выше было доказано более простое выражение для функционала (см. упражнение 12). Теоремы 1 и 2 в данном случае дают следующие оценки

$$0.0886175 a^4 \leq \mathbf{I}_c(\blacksquare) \leq 0.159155 a^4.$$

В заключении параграфа приведем пример области с ограниченным конформным моментом инерции и неограниченной площадью.

**Пример 7.** Пусть односвязная область  $\Omega$  ограничена тремя кривыми:  $y = x^{-1}$  ( $x > 0$ ),  $x = 0$  и  $y = 0$ .

Очевидно, площадь области не ограничена. Кроме того, область симметрична относительно прямой  $y = x$ , в этом легко убедиться если поменять



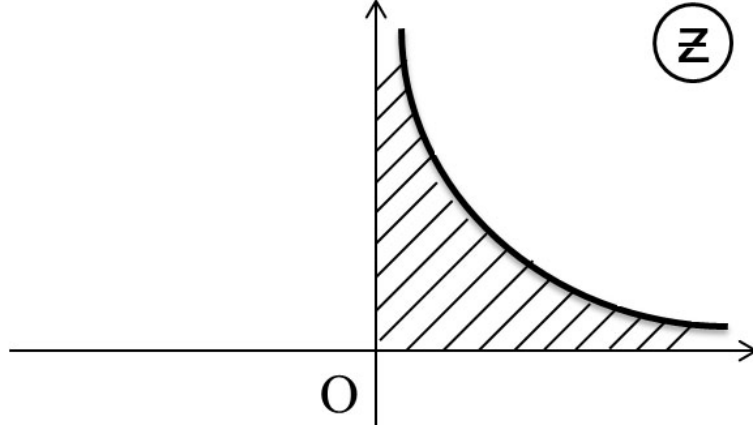


Рис. 1.6: Односвязная область, ограниченная одной веткой гиперболы

ролями переменные  $x$  и  $y$ : область в этом случае не изменится. Таким образом, конформный радиус области достигает максимума на прямой  $y = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).

Отображение  $w = z^2$  ( $z = x + iy$ ) отображает область  $\Omega$  на полосу  $\mathbb{S}$  ширины два. Действительно, две граничные прямые переходят в действительную ось плоскости  $w$ , а ветка гиперболы отобразится на прямую  $v = 2$  ( $w = u + iv$ ), так как

$$\left(x + \frac{i}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{x^2} + 2i.$$

Применяя формулы (1.23) и (1.22), будем иметь

$$\mathbf{R}(z, \Omega) = \left| \frac{dz}{dw} \right| \mathbf{R}(w, \mathbb{S}) = \frac{2 \sin(\pi \operatorname{Im}(w)/2)}{\pi \sqrt{|w|}}. \quad (1.29)$$

Так как отрезку на прямой  $y = x$  области  $\Omega$  при отображении соответствует отрезок  $[0, 2]$  мнимой оси, отсюда вытекают равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\Omega) &= \max_{z \in \Omega, y=x} \mathbf{R}(z, \Omega) = \frac{2}{\pi} \max_{w \in \mathbb{S}, u=0} \frac{\sin(\pi \operatorname{Im}(w)/2)}{\sqrt{|w|}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \max_{v \in [0, 2]} \frac{\sin(\pi v/2)}{\sqrt{v}}. \end{aligned}$$

Вычисление максимума связано с решением трансцендентного уравнения

$$x = \operatorname{tg}(x/2), \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Обозначим единственный корень этого уравнения через  $v^*$  и воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

получим

$$\mathbf{R}(\Omega) = \frac{2\sqrt{v^*}}{\sqrt{1 + (\pi v^*)^2}} (\cong 0.679192).$$

Заметим, что точка в которой достигается максимум, удовлетворяет равенству

$$(x + ix)^2 = 2iv^*.$$

Следовательно,  $x = \sqrt{v^*}$  ( $\cong 0.861405$ ) и  $\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{R}(\sqrt{v^*}(1 + i), \Omega)$ . Нетрудно вычислить, что

$$\rho(\Omega) = \rho((2 - \sqrt{2})(1 + i), \Omega) = 2 - \sqrt{2} (\cong 0.585786).$$

Для вычисления конформного момента инерции области сделаем в интеграле замену переменных, в соответствии с конформным отображением, и применим формулу (1.29). В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_c(\Omega) &= \iint_{\mathbb{S}} \frac{\mathbf{R}(w, \mathbb{S})^2}{4|w|} \frac{dA}{4|w|} = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{S}} \frac{\sin(\pi v/2)^2}{u^2 + v^2} dA = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^2 \sin(\pi v/2)^2 dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + v^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 \frac{\sin(\pi v/2)^2}{v} dv = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{t} dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл, как известно, не выражается через элементарные функции, однако, прибегая к помощи вычислительного пакета “Математика”, окончательно получим

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = \frac{1}{2\pi} (\gamma - \text{Ci}(2\pi) + \log(2\pi)) (\cong 0.387965),$$

где  $\gamma$  — гамма константа Эйлера,  $\text{Ci}(x)$  — косинус интегральный.

В данном примере утверждение теоремы 1 эквивалентно неравенству

$$0.222843 < 0.387965.$$

В заключении отметим, что примеры, рассмотренные в двух последних параграфах, могут являться базовыми для вычислений конформного радиуса и функционалов, зависящих от него. Действительно, свойство конформной инвариантности  $\mathbf{R}(z, \Omega)$  (формула (1.23)) сводит задачу его вычисления к задаче нахождения конформного отображения одной из областей

областей, рассмотренных ранее, на область  $\Omega$ . Таким образом, нет необходимости искать отображения области, связанные именно с единичным кругом. В итоге это позволяет существенно облегчить вычисления и существенно расширить количество примеров.

**Упражнение 13.** Пусть  $\Omega_\lambda$  — сектор угла  $\gamma(= 2\pi\lambda)$  и радиуса  $a$ . Вычислить  $\mathbf{R}(\Omega_\lambda)$ . Найти  $\mathbf{I}_c(\Omega_\lambda)$  при  $\lambda = 1/4$ .

$$\left[ \mathbf{R}(\Omega_\lambda) = 4\lambda [\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda] [\sqrt{1+\lambda^{-2}} - \lambda^{-1}]^\lambda; \right. \\ \left. \mathbf{I}_c(\Omega_{1/4}) = \pi(8 \ln 2 - 5) a^4/32 \right]$$

**Упражнение 14.** Выразить  $\mathbf{I}_c(\Omega_\lambda)$  через определенный интеграл с параметром  $\lambda$ . Найти асимптотическое поведение  $\mathbf{I}_c(\Omega_\lambda)$  при  $\gamma(= 2\pi\lambda) \rightarrow 0$ .

$$\left[ \mathbf{I}_c(\Omega_\lambda) = \frac{(a\gamma)^4}{\pi^3} \int_0^1 \frac{\rho^{2\gamma/\pi-1}(1-\rho)^2 d\rho}{1+\rho}; \right. \\ \left. \mathbf{I}_2(\Omega_\lambda) = \frac{a^4\gamma^3}{\pi^3} \left( \frac{\pi}{2} - (4 \ln 2 - 1)\gamma - \frac{12 - \pi^2}{6\pi} \gamma^2 + O(\gamma^2) \right) \right]$$

**Упражнение 15.** Пусть  $\Omega$  это область ограниченная кривыми  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = 1/x$  ( $x > 0$ ). Найти значения функционалов  $\rho(\Omega)$ ,  $\mathbf{R}(\Omega)$  и  $\mathbf{I}_c(\Omega)$ .

$$[\rho(\Omega) = 0.428711, \mathbf{R}(\Omega) = 0.498422, \mathbf{I}_c(\Omega) = 0.122959]$$

## 1.7 Конформные моменты порядка $\alpha$ .

### Конструирование гипотез.

### Конформный момент 4-го порядка

В этом параграфе нас будет интересовать следующий вопрос: насколько можно обобщить результаты параграфа 1.4? Естественным является рассмотрение геометрического функционала

$$\mathbf{I}_\alpha(\Omega) = \iint_\Omega \mathbf{R}(z, \Omega)^\alpha dA, \quad (1.30)$$

который будем называть *конформным моментом порядка  $\alpha$* . Здесь  $\alpha$  является параметром функционала. Из (1.5) следует, что определение имеет смысл при  $\alpha > -1$ . В частности, при  $\alpha = 0$  получим площадь области,  $\mathbf{I}_2(\Omega)$  совпадает с конформным моментом инерции области. В дальнейшем будем применять именно это обозначение, как более информативное.

Вычислим функционал  $\mathbf{I}_\alpha(\Omega)$  для круга радиуса  $r$ . Для этого возьмем отображающую функцию в виде  $z(\zeta) = r\zeta$  и применим (1.1):

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_\alpha(\mathbb{D}_r) &= r^{\alpha+2} \iint_{\mathbb{D}} (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\xi d\eta = \\ &= \pi r^{\alpha+2} \int_0^1 (1 - x)^\alpha dx = \frac{\pi r^{\alpha+2}}{\alpha + 1}.\end{aligned}$$

Как результат вычислений получим, что в случае круга можно придать вполне определенный смысл выражению  $(\alpha + 1)\mathbf{I}_\alpha(\mathbb{D}_r)$  при  $\alpha \rightarrow -1$ . Данное определение для случая, когда  $\alpha = -1$ , можно распространить на более широкий класс областей, а именно, на области со спрямляемой границей.

Отметим также, что при  $\alpha \geq 0$ , как и для конформного момента инерции,  $\mathbf{I}_\alpha(\Omega)$  монотонно увеличивается с увеличением области, тогда как при  $\alpha < 0$  это свойство отсутствует. Более того, нетрудно построить область, для которых выполняются противоположные неравенства.

**Теорема 4.** Пусть  $\Omega$  – односвязная область такая, что  $\mathbf{I}_\alpha(\Omega) < \infty$  для некоторого  $\alpha > -1$ . Тогда имеет место неравенство

$$\frac{\pi \mathbf{R}(\Omega)^{\alpha+2}}{\alpha + 1} \leq \mathbf{I}_\alpha(\Omega),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.

Таким образом, теорема 1 обобщается на конформные моменты порядка  $\alpha$ .

Естественным является предположение, что и теорема 2 может быть обобщена на конформные моменты порядка  $\alpha$ . Рассмотрим следующее утверждение.

**Гипотеза 1.** Пусть  $\Omega$  – односвязная область конечной площади. Тогда имеет место неравенство

$$\mathbf{I}_\alpha(\Omega) \leq \frac{\mathbf{A}(\Omega)^{\alpha/2+1}}{\pi^{\alpha/2}(\alpha + 1)},$$

где  $\alpha \geq 0$ . При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.

В дальнейшем эта гипотеза будет доказана для случая, когда  $\alpha$  – четное натуральное число. Будут установлены некоторые факты, говорящие о правдоподобности этой гипотезы в общем случае. Также известно, что

гипотеза справедлива для случая нечетных  $\alpha$  (доказательство этого факта выходит за рамки данного пособия). Однако полный аналог теоремы 2 остается пока только на уровне гипотезы.

Заметим, что в случае, когда  $\alpha$  – четное положительное число, можно убедиться в справедливости гипотезы, используя идеи доказательства теоремы 2. Например, при  $\alpha = 4$  придется воспользоваться разложением функции  $(z'(\zeta))^3$  для того, чтобы получить разложение  $\mathbf{I}_4(\Omega)$ , а также получить соответствующее представление для  $\mathbf{A}(\Omega)^3$ . Мы опускаем дальнейшие подробности доказательства. Отметим, что это утверждение будет получено как частный случай более общего результата.

**Упражнение 16.** Записать двумя различными способами в виде неравенств следующее утверждение: “квадрат имеет максимальные моменты инерции порядка  $\alpha$  среди всех прямоугольников заданной площади”. Доказать эквивалентность этих неравенств.

**Упражнение 17.** Восстановить доказательство теоремы 4.

**Упражнение 18.** Пусть  $\mathbf{A}(\Omega) < \infty$ . Вычислить

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\alpha + 1}{\pi} \mathbf{I}_\alpha(\Omega) \right]^{1/(\alpha+2)}.$$

## 1.8 Примеры вычисления конформных моментов порядка $\alpha$

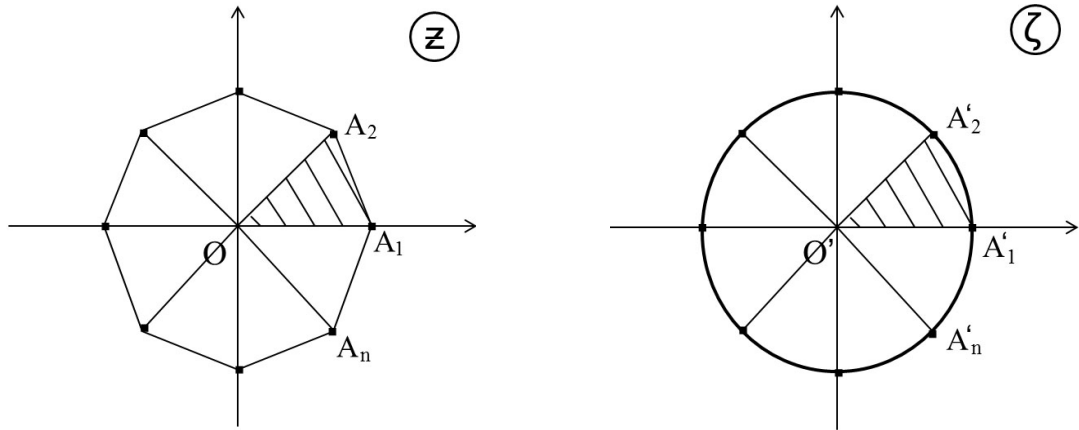
Приведем одну полезную формулу для дальнейших вычислений, которая является непосредственным следствием конформной инвариантности конформного радиуса, т. е. формулы (1.23). Пусть  $F(t)$  — функция, определенная для неотрицательных значений аргумента, тогда имеет место равенство

$$\iint_{G_1} F(\mathbf{R}(z, G_1)) dA = \iint_{G_2} F(|z'(w)| \mathbf{R}(w, G_2)) |z'(w)|^2 dA,$$

где  $z = z(w)$  конформное отображение односвязной области  $G_2$  на  $G_1$ . В данном параграфе формула будет применяться только для случая когда  $F(t) = t^\alpha$  ( $\alpha > -1$ ):

$$\iint_{G_1} \mathbf{R}(z, G_1)^\alpha dA = \iint_{G_2} \mathbf{R}(w, G_2)^\alpha |z'(w)|^{\alpha+2} dA. \quad (1.31)$$

**Пример 1.**  $\Omega_n$  — односвязная область, ограниченная правильным  $n$ -угольником.

Рис. 1.7: Слева — правильный  $n$ -угольник. Справа — вспомогательная плоскость.

Пусть центр описанной вокруг многоугольника окружности лежит в начале координат плоскости  $z$ . Пусть  $a$  — длина стороны многоугольника, и одна из вершин многоугольника лежит на положительной части действительной оси.

Будем строить отображение многоугольника на единичный круг плоскости  $\zeta$ . С помощью рассуждений, аналогичных примеру 1 параграфа 1.5, получим, что искомое отображение можно представить интегралом Кристоффеля — Шварца

$$z(\zeta) = c(n) \int_0^{\zeta} \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}, \quad (1.32)$$

где константа  $c(n)$  определяется по линейным размерам многоугольника.

Действительно, применяя элементарные тригонометрические тождества, получим равенство

$$\frac{a}{2 \sin(\pi/n)} = c(n) \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}}.$$

Последний интеграл выражается через функции Эйлера:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} &= \int_0^1 t^{-1+1/n} (1-t)^{-2/n} = \frac{B(1/n, 1-2/n)}{n} = \\ &= \frac{\sin(\pi/n) \Gamma(1/n)^2 \Gamma(1-2/n)}{\pi n}. \end{aligned}$$

Заметим, что область  $\Omega_n$  обладает не менее чем двумя осями симметрии, которые пересекаются в начале координат. Таким образом, из последних

двух равенств найдем

$$\mathbf{R}(\Omega_n) = |z'(0)| = c(n) = \frac{\pi n a}{2 \sin(\pi/n)^2 \Gamma(1/n)^2 \Gamma(1 - 2/n)}. \quad (1.33)$$

Сделав в формуле (1.30) замену переменных  $z = z(\zeta)$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\alpha(\Omega_n) &= \mathbf{R}(\Omega_n)^{\alpha+2} \iint_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^\alpha d\zeta d\eta}{|1 - \zeta^n|^{(2\alpha+4)/n}} = \mathbf{R}(\Omega_n)^{\alpha+2} \times \\ &\times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r (1 - r^2)^\alpha d\varphi dr}{(1 - r^n e^{in\varphi})^{(\alpha+2)/n} (1 - r^n e^{-in\varphi})^{(\alpha+2)/n}}. \end{aligned}$$

Далее, применяя формулу (1.28), вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\alpha(\Omega_n) &= \frac{\mathbf{R}(\Omega_n)^{\alpha+2}}{\Gamma((\alpha+2)/n)^2} \int_0^1 r (1 - r^2)^\alpha dr \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + (\alpha+2)/n) \Gamma(l + (\alpha+2)/n)}{k! l!} r^{n(k+l)} e^{in(k-l)\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{2\pi \mathbf{R}(\Omega_n)^{\alpha+2}}{\Gamma((\alpha+2)/n)^2} \int_0^1 r (1 - r^2)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + (\alpha+2)/n)^2}{(k!)^2} r^{2nk} dr = \\ &= \frac{\pi \mathbf{R}(\Omega_n)^{\alpha+2}}{\Gamma((\alpha+2)/n)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + (\alpha+2)/n)^2}{(k!)^2} \int_0^1 (1 - t)^\alpha t^{nk} dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл выражается через функции Эйлера. Окончательно получаем формулу

$$\mathbf{I}_\alpha(\Omega_n) = \frac{\pi \mathbf{R}(\Omega_n)^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma((\alpha+2)/n)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + (\alpha+2)/n)^2 \Gamma(nk+1)}{(k!)^2 \Gamma(nk + \alpha + 2)}.$$

где  $\alpha > 0$  и  $n \geq 3$ .

Наиболее важным является случай  $\alpha = 2$ . Применяя формулу понижения для гамма-функции Эйлера, получим

$$\mathbf{I}_c(\Omega_n) = \mathbf{I}_2(\Omega_n) = \frac{2\pi \mathbf{R}(\Omega_n)^4}{\Gamma(4/n)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 4/n)^2}{(k!)^2 (nk+1)(nk+2)(nk+3)}.$$

Из формулы видно, что для квадрата конформный момент инерции имеет наиболее простое выражение. Действительно,

$$\mathbf{I}_2(\blacksquare) = 2\pi \mathbf{R}(\blacksquare)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)} = \frac{\pi \mathbf{R}(\blacksquare)^4 \log 2}{2}.$$

Отметим, что результат в точности совпадает с полученным ранее с помощью других вычислений (см. упражнение 11 и шестой пример в параграфе 1.6).

Заметим также, что в случае  $n = 3$  мы получим формулу для равностороннего треугольника, которая отлична от (1.20):

$$\mathbf{I}_2(\blacktriangle) = \frac{2\pi \mathbf{R}(\blacktriangle)^4}{\Gamma(4/3)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+4/3)^2}{(k!)^2(3k+1)(3k+2)(3k+3)}. \quad (1.34)$$

Это новое представление для конформного момента инерции равностороннего треугольника. Для того чтобы показать, что формулы (1.20) и (1.34), в действительности, дают одно и то же значение, надо применить равенство (1.39), которое будет доказано ниже.

**Пример 2.**  $\Omega$  — односвязная область, рассмотренная во втором примере в параграфе 1.6, т. е. область  $\Omega$  ограничена веткой гиперболы и положительными полуосями координат.

Применяя для вычисления конформного момента формулы (1.31) и (1.28), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\alpha(\Omega) &= \iint_H \left( \frac{\mathbf{R}(w, H)}{2\sqrt{|w|}} \right)^\alpha \frac{dA}{4|w|} = \\ &= \frac{2^{\alpha-2}}{\pi^\alpha} \iint_H \frac{\sin(\pi v/2)^\alpha}{|w|^{1+\alpha/2}} dA = \\ &= \frac{2^{\alpha-2}}{\pi^\alpha} \int_0^2 \sin(\pi v/2)^\alpha dv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u^2 + v^2)^{(\alpha+2)/4}} = \\ &= \frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha/4)}{\pi^{\alpha-1/2}\Gamma((\alpha+2)/4)} \int_0^2 \frac{\sin(\pi v/2)^\alpha}{v^{\alpha/2}} dv. \end{aligned}$$

Делая подходящую замену переменной, получим окончательную формулу

$$\mathbf{I}_\alpha(\Omega) = \frac{2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/4)}{\pi^{(\alpha+1)/2}\Gamma((\alpha+2)/4)} \int_0^\pi \frac{\sin^\alpha t}{t^{\alpha/2}} dt,$$



где  $\alpha > 0$ . Последний интеграл не выражается в квадратурах, а также через известные специальные функции, как показывает вычислительный пакет “Математика”. Однако интеграл представляет собой конечную величину для всех допустимых значений  $\alpha$ . Заметим также, что все конформные моменты порядка  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) конечны, но  $\mathbf{I}_\alpha(\Omega) \rightarrow +\infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , что согласуется с тем, что площадь области неограничена.

В заключении параграфа заметим, что на данный момент нам не известны другие примеры областей с простыми формулами для конформных моментов области. Несмотря на это, ниже будут доказаны некоторые замечательные свойства этих функционалов.

## 1.9 Пространство Бергмана аналитических функций

Пусть  $\Omega$  — плоская односвязная область, не совпадающая со всей плоскостью. Обозначим через  $B_\alpha(\Omega)$  весовое пространство Бергмана аналитических в  $\Omega$  функций с нормой

$$\|f\|_\alpha := \left( \frac{\alpha - 1}{\pi} \iint_\Omega |f(z)|^2 R(z, \Omega)^{\alpha-2} dA \right)^{1/2}, \quad (1.35)$$

где  $\alpha \geq 1$ . При  $\alpha = 1$  дополнительно предположим, что граница  $\partial\Omega$  является спрямляемой кривой и

$$\|f\|_1^2 := \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \|f\|_\alpha^2 = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z(re^{i\theta}))|^2 |z'(re^{i\theta})| d\theta. \quad (1.36)$$

Отметим, что  $B_1(\Omega)$  в точности совпадает с пространством Харди  $H^2(\Omega)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$  — две произвольные последовательности комплексных чисел,  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ . Тогда для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right|^2 \leq \frac{B(\alpha, \beta)}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)! |a_k b_{n-k}|^2}{B(k+\alpha, n-k+\beta)}. \quad (1.37)$$

Равенства для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$  имеют место тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (i)  $a_k = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;
- (ii)  $b_k = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;
- (iii)  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$  и найдется такая константа  $q$ , что

$$ka_k = a_0 q^k / B(\alpha, k), \quad kb_k = b_0 q^k / B(\beta, k) \quad (1.38)$$

для всех  $k = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Сначала установим одно интересное равенство для бета-функции.

Разложив в ряд Тейлора функцию  $(1 - \zeta)^{-\alpha-\beta}$  в единичном круге  $\mathbb{D}$ , нетрудно получить

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(1 - \zeta)^{\alpha+\beta}} = B(\alpha, \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta)}{n!} \zeta^n.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(1 - \zeta)^{\alpha+\beta}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} \zeta^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \beta)}{n!} \zeta^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(n - k + \beta)}{k!(n - k)!} \zeta^n. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в двух разложениях, выводим

$$\sum_{k=0}^n \frac{B(k + \alpha, n - k + \beta)}{k!(n - k)!} = \frac{B(\alpha, \beta)}{n!}, \quad (1.39)$$

отсюда легко получить, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k B(k + \alpha, n - k + \beta) = B(\alpha, \beta),$$

где  $\alpha, \beta > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

Теперь зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и положим

$$\begin{aligned} u_k &= a_k b_{n-k} \sqrt{k!(n - k)!} / \sqrt{n! B(k + \alpha, n - k + \beta)} \\ v_k &= \sqrt{n! B(k + \alpha, n - k + \beta)} / \sqrt{k!(n - k)!}. \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши — Буняковского

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right|^2 = \left| \sum_{k=0}^n u_k v_k \right|^2 \leq \sum_{k=0}^n |u_k|^2 \sum_{k=0}^n v_k^2. \quad (1.40)$$

С учетом (1.39) из последнего неравенства следует (1.37).

Теперь рассмотрим совокупность неравенств (1.40) для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Отметим, что  $u_k$  и  $v_k$  по их определению зависят от  $n$ , т. е.  $u_k = u_k(n)$  и  $v_k = v_k(n)$ . Так, например, в общем случае  $u_0(0) \neq u_0(1)$ . Неравенство (1.37) обратится в равенство, если совокупность неравенств (1.40) обратится в совокупность равенств. Это эквивалентно выполнению условий  $u_k(n) = \lambda_n v_k(n)$  ( $k = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ ), при этом константа  $\lambda_n$  должна зависеть только от  $n$ . С учетом обозначений получим следующие равенства для определения  $a_k$  и  $b_k$ :

$$k!(n-k)!a_k b_{n-k} = \lambda_n n! B(k+\alpha, n-k+\beta), \quad (1.41)$$

где  $0 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}$ .

Положим  $a_0 = 0$ . Предположив, что  $a_s \neq 0$  для некоторого  $s \geq 1$ , из (1.41) получаем, что тогда  $b_k = 0$  для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$ , в данном случае  $\lambda_n = 0, n \in \mathbb{N}$ . К аналогичному заключению приходим, предполагая  $b_0 = 0$ .

Предположим, что  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ , и применим (1.41) для  $n = 1$ . Имеем

$$\frac{a_1}{\alpha a_0} = \frac{b_1}{\beta b_0} =: q.$$

Тогда для  $n \geq 2$ , полагая  $k = 0$  и  $k = 1$  в (1.41), исключаем  $\lambda_n$

$$\frac{u_0(n)}{v_0(n)} = \frac{u_1(n)}{v_1(n)} (= \lambda_n),$$

что эквивалентно равенству

$$b_n = q \frac{n+\beta-1}{n} b_{n-1}.$$

Аналогично, полагая  $k = n$  и  $k = n-1$ , получаем

$$a_n = q \frac{n+\alpha-1}{n} a_{n-1}.$$

Отметим, что в данном случае

$$\lambda_n = \frac{a_0 b_0 q^n \Gamma(\alpha + \beta + n)}{n! \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}.$$

Применяя индукционное предположение по  $n$ , получаем равенства (1.38).

**Упражнение 19.** Пусть  $\Omega$  – круг. Вычислить норму Бергмана  $\|f\|_\alpha$  функции  $f(z) = (2 - \zeta(z))^{-\beta}$ .

**Упражнение 20.** Проверить аксиомы нормы для (1.35). Показать, что определение (1.36) корректно, т. е. (1.36) получается из определения нормы в (1.35) при  $\alpha \rightarrow 1 + 0$ .

## 1.10 Теорема о норме Бергмана произведения аналитических функций и её следствия.

### Цепочки изопериметрических неравенств

Обозначим через  $B_{\alpha,q}(\Omega)$  множество функций  $f \in B_\alpha(\Omega)$  для которых справедливо представление

$$f(z) = \left( \frac{a_0 / \sqrt{z'(\zeta)}}{1 - q\zeta} \right)^\alpha,$$

где  $a_0, q \in \mathbb{C}$  ( $|q| < 1$ ).

**Теорема 5.** Пусть  $\Omega$  — плоская односвязная область,  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta \geq 1$  и  $f(z) \in B_\alpha(\Omega)$ ,  $g(z) \in B_\beta(\Omega)$ . Тогда  $f(z)g(z) \in B_{\alpha+\beta}(\Omega)$  и имеет место неравенство

$$\|fg\|_{\alpha+\beta} \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta. \quad (1.42)$$

Если  $f(z) \not\equiv 0$  и  $g(z) \not\equiv 0$ , то равенство достигается только для функций  $f(z) \in B_{\alpha,q}(\Omega)$  и  $g(z) \in B_{\beta,q}(\Omega)$ .

Заметим, что если в условиях теоремы положить  $\alpha = \beta = 1$  и  $f(z) \equiv g(z) \equiv 1$ , то неравенство (1.42) обратится в классическое изопериметрическое неравенство

$$\mathbf{A}(\Omega) \leq \frac{\mathbf{L}(\Omega)^2}{4\pi}.$$

Таким образом, теорема 5 носит изопериметрический характер.

*Следствие 3.* Пусть  $\alpha, \beta \geq 0$ , тогда

$$\mathbf{I}_{\alpha+\beta}(\Omega) \leq \frac{\alpha\beta}{\pi(\alpha + \beta + 1)} \mathbf{I}_{\alpha-1}(\Omega) \mathbf{I}_{\beta-1}(\Omega). \quad (1.43)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\Omega$  — круг.

Это следствие представляет собой пример изопериметрического неравенства, включающего более двух функционалов области. Такие неравенства являются более трудными для исследования. Кроме того, из следствия 3 легко вытекает следующее утверждение.

*Следствие 4.* Пусть  $n$  — целое число ( $n \geq 0$ ), тогда

$$\iint_{\Omega} \mathbf{R}(z, \Omega)^{2n} d\mathbf{A} \leq \frac{\mathbf{A}(\Omega)^{n+1}}{(2n+1)\pi^n}. \quad (1.44)$$

Равенство достигается только для круга.

Из неравенства (1.43) также вытекает

*Следствие 5.* Гипотезу 1 достаточно установить для  $\alpha \in (0, 2]$ . Случай  $\alpha > 2$  сводится к  $\alpha \in (0, 2]$  при помощи неравенства (1.43).

*Доказательство теоремы 5.* При доказательстве теоремы воспользуемся одним из стандартных приемов в теории функций комплексного переменного. А именно, используя теорему Римана о конформном отображении односвязных областей, сведем проверку неравенства (1.42) к случаю единичного круга.

Делая в (1.23) замену  $z = z(\zeta)$ , найдем

$$\|f\|_\alpha^2 = \frac{\alpha - 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |f(z(\zeta))|^2 |z'(\zeta)|^\alpha R(\zeta, \mathbb{D})^{\alpha-2} d\xi d\eta.$$

Таким образом, основное неравенство (1.42) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta - 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |F(\zeta)G(\zeta)|^2 (1 - |\zeta|^2)^{\alpha+\beta-2} d\xi d\eta &\leq \\ &\leq \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{\pi^2} \iint_{\mathbb{D}} |F(\zeta)|^2 (1 - |\zeta|^2)^{\alpha-2} d\xi d\eta \times \\ &\times \iint_{\mathbb{D}} |G(\zeta)|^2 (1 - |\zeta|^2)^{\beta-2} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1.45)$$

здесь

$$F(\zeta) = (z'(\zeta))^{\alpha/2} f(z(\zeta)), \quad G(\zeta) = (z'(\zeta))^{\beta/2} g(z(\zeta)),$$

где  $\zeta = \xi + i\eta$ . Так как  $z'(\zeta) \neq 0$  для всех  $\zeta \in \mathbb{D}_r$ , зафиксируем однозначную голоморфную ветвь функции  $(z'(\zeta))^{\alpha/2}$  в  $\mathbb{D}$ , тогда функции  $F(\zeta)$ ,  $G(\zeta)$  будут тоже голоморфными в  $\mathbb{D}$ . Разлагая функцию в ряд Тейлора  $F(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots$  в  $\mathbb{D}$  и применяя соотношение (1.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |F(\zeta)|^2 (1 - |\zeta|^2)^{\alpha-2} d\xi d\eta &= \\ &= 2(\alpha - 1) \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^1 (1 - r^2)^{\alpha-2} r^{2n+1} dr = \\ &= \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha)} |a_n|^2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Пусть  $G(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots$  в  $\mathbb{D}$ . Тогда легко видеть, что неравенство (1.45) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right|^2 \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + \beta)} &\leq \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k!(n-k)!}{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(n-k + \beta)} |a_k b_{n-k}|^2. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Но последнее неравенство является следствием леммы 2. Действительно, для этого необходимо лишь учесть очевидное равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(n-k + \beta)} \Big/ \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(n + \alpha + \beta)} = \frac{B(\alpha, \beta)}{B(k + \alpha, n-k + \beta)}.$$

Это завершает доказательство неравенства (1.42).

Изучим случаи достижения равенства. Пусть  $f(z)g(z) \not\equiv 0$  и  $\|fg\|_{\alpha+\beta} = \|f\|_{\alpha}\|g\|_{\beta}$ , тогда неравенство (1.47) обратится в равенство для коэффициентов Тейлора функций  $F(\zeta) = (z'(\zeta))^{\alpha/2}f(z(\zeta))$ ,  $G(\zeta) = (z'(\zeta))^{\beta/2}g(z(\zeta))$ . Из соотношений (1.28) получим

$$F(0) = a_0 \neq 0, \quad F^{(n)}(0) = a_0(n-1)!q^n / B(\alpha, n) = \frac{a_0 q^n \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}$$

и

$$G(0) = b_0 \neq 0, \quad G^{(n)}(0) = b_0(n-1)!q^n / B(\beta, n) = \frac{b_0 q^n \Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\beta)}$$

для  $n \geq 1$ . Соответствующие ряды Тейлора сходятся в  $\mathbb{D}$  тогда и только тогда, когда  $|q| \leq 1$ . Просуммировав соответствующие ряды, получим

$$F(\zeta) = a_0(1 - q\zeta)^{-\alpha}, \quad G(\zeta) = b_0(1 - q\zeta)^{-\beta},$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ,  $|q| \leq 1$ . Нетрудно видеть, что с учетом введенных обозначений эти соотношения эквивалентны утверждению теоремы 5. Осталось заметить, что все интегралы в неравенстве (1.45) сходятся тогда и только тогда, когда  $|q| < 1$ . Действительно, формула (1.46) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |F(\zeta)|^2 (1 - |\zeta|^2)^{\alpha-2} d\xi d\eta &= \frac{|a_0|^2}{\Gamma(\alpha)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} |q|^{2n} = \frac{|a_0|^2}{(1 - |q|^2)^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы 5. □

В конце этого параграфа ознакомимся с новым понятием в теории изопериметрических неравенств. Чтобы лучше объяснить его, по аналогии с Г. Поля и Г. Сегё, рассмотрим вместе с областью  $\Omega$  круг, имеющий тот же самый конформный момент инерции порядка  $\alpha$ , что и  $\Omega$ . Радиус этого круга в четвертой степени равен

$$\bar{\mathbf{I}}_\alpha = \left[ \frac{\alpha + 1}{\pi} \mathbf{I}_\alpha(\Omega) \right]^{4/(\alpha+2)}.$$

Обозначим  $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R}(\Omega)^4$ . Таким образом, функционал  $\bar{\mathbf{I}}_\alpha$  имеет размерность длины в четвертой степени для всех допустимых значений параметра  $\alpha$ .

При  $\alpha = \beta$  следствие 3 примет следующий элегантный вид:

$$\bar{\mathbf{I}}_\alpha \geq \bar{\mathbf{I}}_{2\alpha+2} \quad (\alpha \geq -1).$$

Применяя это неравенство итерационно, получаем цепочку изопериметрических неравенств

$$\bar{\mathbf{I}}_\alpha \geq \bar{\mathbf{I}}_{2\alpha+2} \geq \bar{\mathbf{I}}_{4\alpha+6} \geq \bar{\mathbf{I}}_{8\alpha+14} \geq \dots \geq \bar{\mathbf{R}}. \quad (1.48)$$

Фиксируя  $\alpha$  в промежутке  $[-1, 0)$ , получаем различные примеры цепочек неравенств, например,

$$\bar{\mathbf{I}}_{-1} \geq \bar{\mathbf{I}}_0 \geq \bar{\mathbf{I}}_2 \geq \bar{\mathbf{I}}_6 \geq \bar{\mathbf{I}}_{14} \geq \dots \geq \bar{\mathbf{R}}.$$

Нетрудно видеть, что первое неравенство представляет собой классическое изопериметрическое неравенство, второе неравенство – утверждение теоремы 2, также несложно обнаружить в цепочке неравенств и теорему 1.

Рассмотрим функционал  $\bar{\mathbf{I}}_\alpha$  как функцию от  $\alpha$ . Пусть

$$f(\alpha) := \bar{\mathbf{I}}_\alpha.$$

Тогда неравенство (1.48) позволяет выдвинуть следующую гипотезу.

**Гипотеза 2.** Функция  $f(\alpha)$  является невозрастающей, причём если область  $\Omega$  не является кругом, то  $f(\alpha)$  является строго убывающей функцией.

Приведенные следствия из теоремы 5 подтверждают эту гипотезу. В дальнейшем будут получены другие изопериметрические неравенства, говорящие в её пользу. Выясним, что в действительности утверждает гипотеза.

Пусть  $\alpha_1 > \alpha_2 \geq -1$ , тогда утверждается, что  $f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2)$ , т. е.

$$\bar{\mathbf{I}}_{\alpha_1} \leq \bar{\mathbf{I}}_{\alpha_2}.$$

Такое свойство функционала  $\bar{I}_\alpha$  называется *изопериметрической монотонностью*. Частным случаем свойства изопериметрической монотонности является цепочка неравенств (1.48). Таким образом, многие утверждения данного пособия следуют из одного более сильного изопериметрического свойства, остающегося на уровне гипотезы. Отметим, что к настоящему времени известно лишь несколько функционалов, обладающих свойством изопериметрической монотонности.

При  $\alpha \geq 0$  из гипотезы следует неравенство  $f(\alpha) \leq f(0)$ . Как нетрудно видеть, это совпадает с утверждением гипотезы 1. Таким образом, гипотеза 2 является обобщением гипотезы 1.

Другим следствием из гипотезы 2 и теоремы 4 является существование предела  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{I}_\alpha$  для произвольной односвязной области. Подтверждением этого факта является также цепочка неравенств (1.48). Покажем, что данный факт в действительности имеет место.

Для доказательства мы воспользуемся техникой оценок на линиях уровня конформного радиуса. Это немного выходит за рамки данного пособия, однако наглядно демонстрирует еще один метод изучения функционалов области. Для формулировки утверждения нам понадобятся новые обозначения. Пусть

$$\Omega(\mu) := \{z \in \Omega \mid R(z, \Omega) > \mu\},$$

где  $0 \leq \mu \leq R(\Omega)$ . Границу множества  $\Omega(\mu)$  называют линиями уровня конформного радиуса. На рисунке 1.8 над областью  $\Omega$  построена поверхность конформного радиуса области, т. е. трехмерное тело

$$\{(x, y, u) : 0 < u < R(z, \Omega), z = x + iy\}.$$

Каждое сечение тела плоскостью  $R(z, \Omega) = \mu$  ( $0 < \mu < R(\Omega)$ ) определяет множество  $\Omega(\mu)$ . Нетрудно видеть, что объем тела выражает статический конформный момент области, т. е.  $I_1(\Omega)$ .

В дальнейшем нам будет полезно следующее простое свойство областей, ограниченных линиями уровня:  $\Omega(\mu_1) \subset \Omega(\mu_2)$  при  $\mu_1 \geq \mu_2$ .

**Теорема 6.** Пусть  $I_{\alpha_0}(\Omega) < +\infty$ ,  $\alpha_0 > -1$ . Тогда

- 1)  $A(\Omega(\mu)) < +\infty$ ,  $0 < \mu \leq R(\Omega)$ .
- 2)  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{I}_\alpha = \bar{R}$ .

*Доказательство.* Основным в этой теореме является случай  $\alpha_0 > 0$ . Другие случаи сводятся к нему применением неравенства (1.48).



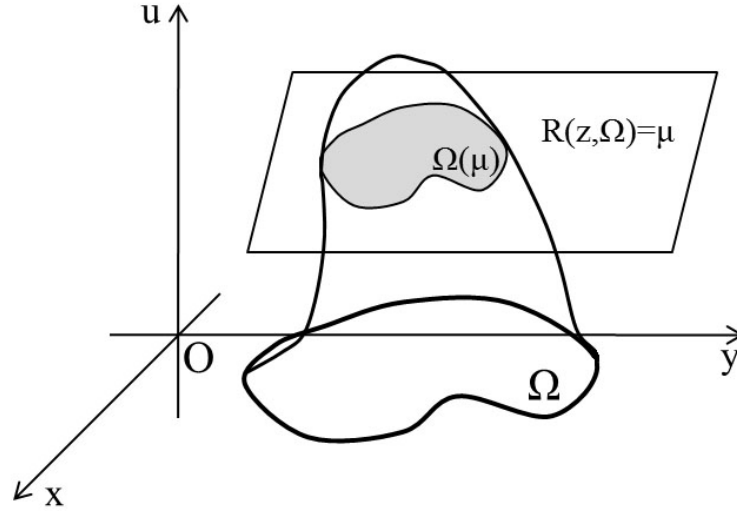


Рис. 1.8: Линии уровня конформного радиуса

Для доказательства пункта 1) предположим противное. Пусть существует  $\mu_0$  такое, что  $\Omega(\mu_0)$  имеет бесконечную площадь. Тогда, применяя элементарные оценки, получим

$$\mathbf{I}_{\alpha_0}(\Omega) \geq \iint_{\Omega(\mu_0)} \mathbf{R}(z, \Omega)^{\alpha_0} dA \geq \mu_0^{\alpha_0} \mathbf{A}(\Omega(\mu_0)).$$

Последнее выражение не ограничено, это противоречит условию теоремы.

Следствием из теоремы 4 является неравенство  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mathbf{I}}_{\alpha} \geq \bar{\mathbf{R}}$ . Таким образом, для доказательства пункта 2) теоремы будет достаточно установить неравенство  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{\mathbf{I}}_{\alpha} \leq \bar{\mathbf{R}}$ .

Представим  $\bar{\mathbf{I}}_{\alpha}$  в виде

$$\bar{\mathbf{I}}_{\alpha} = K_1 K_2, \quad (1.49)$$

где

$$K_1 = \mathbf{R}(\Omega)^{4\alpha/(\alpha+2)} \left( \frac{\alpha+1}{\pi} \iint_{\Omega(\mu)} \left( \frac{\mathbf{R}(z, \Omega)}{\mathbf{R}(\Omega)} \right)^{\alpha} dA \right)^{4/(\alpha+2)},$$

$$K_2 = \left( 1 + \iint_{\Omega \setminus \Omega(\mu)} \mathbf{R}(z, \Omega)^{\alpha} dA \right) / \left( \iint_{\Omega(\mu)} \mathbf{R}(z, \Omega)^{\alpha} dA \right)^{4/(\alpha+2)}.$$

Выберем  $\mu(>0)$  таким образом, что

$$\iint_{\Omega(\mu)} \mathbf{R}(z, \Omega)^{\alpha_0} dA > \iint_{\Omega \setminus \Omega(\mu)} \mathbf{R}(z, \Omega)^{\alpha_0} dA.$$

Далее  $\mu$  считаем фиксированным. Тогда для  $\alpha > \alpha_0$  получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega(\mu)} R(z, \Omega)^\alpha dA &= \mu^\alpha \iint_{\Omega(\mu)} \left( \frac{R(z, \Omega)}{\mu} \right)^\alpha dA \geq \\ &\geq \mu^\alpha \iint_{\Omega(\mu)} \left( \frac{R(z, \Omega)}{\mu} \right)^{\alpha_0} dA = \mu^{\alpha-\alpha_0} \iint_{\Omega(\mu)} R(z, \Omega)^{\alpha_0} dA. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство (только с противоположным знаком) получаем для интеграла по  $\Omega \setminus \Omega(\mu)$ .

Учитывая последние неравенства и пункт 1) теоремы, из (1.49) имеем

$$\bar{I}_\alpha < \left( \frac{2(\alpha+1)}{\pi} A(\Omega(\mu)) \right)^{4/(\alpha+2)} R(\Omega)^{4\alpha/(\alpha+2)}.$$

Переходя к пределу по  $\alpha$ , получаем неравенство  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{I}_\alpha \leq \bar{R}$ .  $\square$

**Упражнение 21.** Доказать следствия 3 и 4. Возможны ли неравенства, противоположные (1.43) и (1.44)? Привести класс областей, для которого имеют место обратные неравенства.

**Упражнение 22.** Показать, что следствие 3 вытекает также из гипотезы 2.

**Упражнение 23.** Построить и доказать изопериметрические неравенства и исследовать случаи равенства для функционалов:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{I_{\alpha+\beta}(\Omega)}{A(\Omega) I_{\alpha-3/2}(\Omega)}; \quad \text{ii)} \quad \frac{I_{\alpha+\beta+\gamma}(\Omega)}{I_{\alpha-3/2}(\Omega) I_{\beta-3/2}(\Omega)}; \\ \text{iii)} \quad & \frac{I_{\alpha+\beta+\gamma}(\Omega)}{I_{\alpha-4/3}(\Omega) I_{\beta-4/3}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Все функционалы для соответствующих значений параметра считаются определенными и конечными,  $\Omega$  — односвязная область.

**Упражнение 24.** Доказать, что для произвольного  $\mu > 0$  существует  $r > 0$  такое, что множество  $\Omega(\mu)$  лежит в шаре радиуса  $r$  и с центром в нуле. Получить отсюда утверждение леммы 1.

**Упражнение 25.** Доказать, что в условиях теоремы 6 при  $\alpha_0 > 0$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{\alpha_0} A(\Omega(\mu)) = 0.$$

**Упражнение 26.** Доказать, что если  $f(z) \in B_\alpha(\Omega)$ , то

$$\|f\|_\alpha \geq \mathbf{R}(\Omega)^{\alpha/2} |f(z_0)|.$$

Получить из этого неравенства утверждение теоремы 4.

**Упражнение 27.** Пусть  $f(z) \in B_{\alpha_0}(\Omega)$  ( $\alpha_0 > 1$ ). Вычислить предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\|f\|_\alpha)^{1/\alpha}$$

и показать, что предел не зависит от функции, а зависит только от геометрии области.



## Глава II

### Жесткость кручения односвязной области

Основным целью этой главы является доказательство изопериметрического неравенства между жесткостью кручения области и конформным моментом инерции по материалам статьи [11]. Материал первого параграфа является кратким изложением необходимых для доказательства неравенства результатов из [1] (см. главу 5). Во втором параграфе главы доказывается основной результат и обсуждаются некоторые его следствия и выдвигается гипотеза. В следующих двух параграфах, следуя идее статьи [12], мы рассматриваем вопрос распространения предыдущих результатов на односвязные области с неограниченной площадью. Второе доказательство изопериметрического неравенства между конформным моментом инерции области и жесткостью кручения основано на новых представлениях для функционалов. В частности, следствием нового доказательства является возможность полного исследования случаев равенства без дополнительных ограничений на область. Другим следствием являются новые представления для различных функционалов области. В следующем параграфе предлагается доказательство одного неравенства Л. Е. Пейна, основанного на оценках для множеств уровня функции напряжения. В заключительном параграфе приводятся формулы для жесткости кручения некоторых односвязных областей.

Основным методом исследования остается метод конформных отображений. Полученные новые представления функционалов через коэффициенты отображающей функции, позволяют в явном виде “ощутить” близкую природу изучаемых характеристик области.

## 2.1 Неравенство Сен-Венана – Поля.

### Доказательство Давенпорта

Конформный и евклидов моменты инерции области возникли в связи с двусторонними оценками физического функционала: жесткости кручения. В этом и следующем параграфах для жесткости кручения будут доказаны классические изопериметрические неравенства, аналогами которых являются теоремы 1 и 2.

Изучим элементарные свойства функции напряжения. Сначала убедимся, что эта функция существует и единственна. Положим

$$\Phi(x, y) = u(z, \Omega) + (x^2 + y^2)/2 \quad (z = x + iy), \quad (2.1)$$

тогда согласно (1.3) получим

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Phi = (x^2 + y^2)/2 \text{ на } \partial\Omega,$$

т. е.  $\Phi(x, y)$  — гармоническая функция в области. Хорошо известно, что такая функция существует и определяется единственным образом. Из того факта, что  $\Delta u \leq 0$ , следует, что  $u(x, y)$  достигает минимума на границе области. Таким образом, функция напряжения положительна в области.

Приведем также вариационное определение жесткости кручения:

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sup_{f \in C_0^\infty(\Omega)} \left( 2 \iint_{\Omega} f dA \right)^2 / \iint_{\Omega} |\nabla f|^2 dA.$$

Эквивалентность двух определений можно установить стандартным способом (см. [1]). Непосредственным следствием вариационного определения является монотонность жесткости кручения относительно области, т. е. если  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , то  $\mathbf{P}(\Omega_1) \leq \mathbf{P}(\Omega_2)$ .

Будет удобно использовать в дальнейшем следующее обозначение для четырех кратных сумм

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta}^*,$$

здесь \* означает, что индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  принимают неотрицательные целые значения, связанные условием

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta. \quad (2.2)$$

**Теорема 7.** При условии  $\mathbf{P}(\Omega) < +\infty$  имеет место представление

$$\mathbf{P}(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta}^* \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} a_{\alpha} a_{\beta} \overline{a_{\gamma}} \overline{a_{\delta}}, \quad (2.3)$$

где  $a_k$  — коэффициенты разложения в ряд Маклорена функции  $z = z(\zeta)$ .

*Доказательство.* Все встречающиеся ряды будем считать абсолютно сходящимися, в дальнейшем будет показано, как перейти к более естественным условиям, связанными с геометрией области  $\Omega$ .

Введенная гармоническая функция  $\Phi(x, y)$  определяет с точностью до мнимой постоянной аналитическую в  $\Omega$  функцию  $F = \Phi + i\Psi$ . Так как  $z(\zeta)$  является аналитической функцией от  $\zeta$ , то и функция  $F(\zeta) = F(z(\zeta))$  также является аналитической в  $\mathbb{D}$ . Таким образом, имеет место разложение в ряд

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \zeta^k, \quad |\zeta| < 1.$$

Следовательно, задача определения функции  $\Phi$  оказывается эквивалентной определению последовательности  $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ , которую, в свою очередь, можно выразить через коэффициенты разложения в ряд Маклорена функции, отображающей единичный круг на область  $\Omega$ . Для этого попытаемся удовлетворить краевое условие для функции  $\Phi$ . При  $|\zeta| = 1$  имеем

$$2\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n \zeta^n + \overline{u_n} \zeta^{-n}) = |z|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \sum_{l=0}^{\infty} \overline{a_l} \zeta^{-l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n. \quad (2.4)$$

Здесь  $b_n = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l+n} \overline{a_l}$ . Заметим, что  $\overline{b_n} = b_{-n}$ , тогда краевое условие для функции  $\Phi$  будет удовлетворено, если положить

$$2u_0 = b_0, \quad u_n = b_n, \quad \overline{u_n} = b_{-n}.$$

Как следует из теории рядов Фурье, этот выбор единственный.

Используя только что полученные представления  $u_n$  и переходя к полярным координатам  $\zeta = re^{i\theta}$ , получаем

$$\begin{aligned} 2\Phi &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \zeta^n + \overline{b_n} \zeta^{-n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^{|n|} e^{in\theta} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_{\alpha} \overline{a_{\gamma}} r^{|\alpha-\gamma|} e^{i(\alpha-\gamma)\theta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу единственности решения задачи Дирихле полученное представление единственно.

Из определения функции  $\Phi$  получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega) &= 2 \iint_{\Omega} \Phi \, dA - \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dA = \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi |z'(\zeta)|^2 r \, d\theta dr - J_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теперь нам необходимо выразить два последних интеграла через коэффициенты  $a_k$ .

Займемся преобразованием интеграла  $J_0$ . Сделаем в интеграле замену переменных  $z = z(\zeta)$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ), в результате получим

$$J_0 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |z(\zeta)|^2 |z'(\zeta)|^2 d\xi d\eta = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |(z^2(\zeta))'|^2 d\xi d\eta.$$

Использував разложение (1.8), представим в виде ряда функцию

$$z^2(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n,$$

где  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ . Отсюда следует, что

$$(z^2(\zeta))' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \zeta^{n-1}.$$

Теперь сделаем те же рассуждения, что и при разложении конформного момента инерции (см. параграф 1.3). Опуская некоторые вычисления, с применением (1.11) получим

$$J_0 = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} n l A_n \overline{A_l} r^{n+l-1} e^{i\theta(n-l)} d\theta dr = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n |A_n|^2.$$

Последняя сумма и есть требуемое разложение, в дальнейшем оно понадобится в другой форме. Нетрудно установить, что интеграл  $J_0$  можно представить в следующем виде:

$$J_0 = \frac{\pi}{4} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta}^* (\alpha + \beta) a_{\alpha} a_{\beta} \overline{a_{\gamma} a_{\delta}}. \quad (2.7)$$

Преобразуем аналогичным путем первый интеграл из (2.6). Для этого введем обозначения

$$z'(\zeta) = e^{-i\theta} \sum_{\beta=1}^{\infty} \beta a_{\beta} r^{\beta-1} e^{i\beta\theta},$$

$$\overline{z'(\zeta)} = e^{i\theta} \sum_{\delta=1}^{\infty} \delta \overline{a_{\delta}} r^{\delta-1} e^{-i\delta\theta}.$$



Учитывая разложение (2.5), получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\Omega) + J_0 &= \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\delta=1}^{\infty} \beta \delta a_{\alpha} a_{\beta} \overline{a_{\gamma} a_{\delta}} r^{|\alpha-\gamma|+\beta+\delta-1} e^{i(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\theta} = \\
 &= 2\pi \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta}^* \frac{\beta \delta a_{\alpha} a_{\beta} \overline{a_{\gamma} a_{\delta}}}{|\alpha-\gamma|+\beta+\delta}. \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось установить некоторые тождества. Учитывая соотношение между индексами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ , получим

$$|\alpha - \gamma| + \beta + \delta = |\delta - \beta| + \beta + \delta = 2 \max\{\beta, \delta\},$$

отсюда следует равенство

$$\frac{2\beta\delta}{|\alpha - \gamma| + \beta + \delta} = \min\{\beta, \delta\}.$$

Меняя ролями  $\alpha$  и  $\beta$ , с одной стороны, и  $\gamma$  и  $\delta$  — с другой, запишем последние равенства в четырех различных формах. Тогда из (2.7) и (2.8) получим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\Omega) &= \frac{\pi}{4} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta}^* a_{\alpha} a_{\beta} \overline{a_{\gamma} a_{\delta}} [\min\{\alpha, \gamma\} + \min\{\alpha, \delta\} + \\
 &\quad + \min\{\beta, \gamma\} + \min\{\beta, \delta\} - \alpha - \beta].
 \end{aligned}$$

Если предположить, что  $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ , то из равенства  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$  следует, что  $\beta$  будет максимальным, а выражение в квадратных скобках будет равно  $2\alpha$ . Поменяв индексы суммирования местами, окончательно придем к формуле (2.3). Это завершает доказательство теоремы.  $\square$

Следующая теорема известна как гипотеза Сен-Венана, доказанная Г. Полиа в середине XX века. Построение гипотезы может быть проведено на основе анализа таблицы на странице 93. Оригинальное доказательство теоремы, приведенное ниже, принадлежит Г. Давенпорту (подробнее см. [1]).

**Теорема 8.** Пусть  $\Omega$  — односвязная область конечной площади. Тогда разложение (2.3) представляет абсолютно сходящийся ряд и имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(\Omega) \leq \frac{\mathbf{A}(\Omega)^2}{2\pi},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  — круг.

*Доказательство.* Воспользуемся полученным в предыдущей теореме разложением жесткости кручения. Применим к нему неравенство Коши — Буняковского (1.11), полагая

$$u = \sqrt{\min(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} a_\alpha a_\beta, \quad v = \sqrt{\min(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} a_\gamma a_\delta.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\mathbf{P}(\Omega)}{\pi} &\leq \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta}^* \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} |a_\alpha a_\beta|^2 = \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} |a_\alpha a_\beta|^2 \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \end{aligned}$$

где индексы суммирования все еще связаны соотношением (2.2), несмотря на то, что символ звездочка опущен. Учитывая соотношение между индексами и предполагая  $\alpha \leq \beta$ , вычислим суммы по  $\gamma$  и  $\delta$  при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\beta$

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^{\alpha+\beta} \min(\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta - \gamma) &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \gamma + \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} \alpha + \sum_{\gamma=\beta}^{\alpha+\beta} (\alpha + \beta - \gamma) = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \alpha(\beta - \alpha) + (\alpha + \beta)(\alpha + 1) - \frac{(\alpha + 2\beta)(\alpha + 1)}{2} = \alpha\beta. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая (1.8), окончательно получим

$$\frac{2\mathbf{P}(\Omega)}{\pi} \leq \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \alpha\beta |a_\alpha a_\beta|^2 = \frac{1}{\pi^2} \left( \pi \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha |a_\alpha|^2 \right)^2 = \frac{\mathbf{A}(\Omega)^2}{\pi^2}.$$

Равенство в последнем неравенстве достигается тогда и только тогда, когда  $u$  пропорционально  $v$ , т. е.  $a_\alpha a_\beta = a_\gamma a_\delta$ , при  $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ . В частности,  $a_n a_1 = a_{n-1} a_2$ . Далее можно в точности повторить выкладки, сделанные при доказательстве теоремы 2, или прийти к тому же выводу другим путем. В силу условий теоремы, а также утверждений теоремы 2 и леммы 1 максимум конформного радиуса будет достигаться внутри области. В силу произвола при выборе конформного отображения можно считать, что точка, где достигается максимум конформного радиуса, является образом нуля. Но тогда известно (см. упражнение ниже), что при таком выборе  $a_2 = 0$ . Следовательно, в силу соотношения между коэффициентами  $a_n = 0$  ( $n \geq 2$ ), т. е.  $z(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta$ .

Это рассуждение завершает доказательство теоремы.  $\square$

*Следствие 6.* Для областей с ограниченной площадью представление (2.3) жесткости кручения является абсолютно сходящимся рядом.

**Упражнение 28.** Построить примеры односвязных областей, вычислить их жесткость кручения и оценить абсолютную погрешность неравенства в теореме 8 для этих областей.

**Упражнение 29.** Пусть в точке  $z_0 \in \Omega$  достигается максимум конформного радиуса области  $\Omega$ . Пусть  $z = z(\zeta)$  конформно отображает единичный круг на  $\Omega$  так, что  $z_0 = z(0)$ . Доказать, что коэффициент  $a_2$  в разложении в ряд Маклорена функции  $z(\zeta)$  равен нулю.

## 2.2 Изопериметрическое неравенство между жесткостью кручения и конформным моментом инерции

Как мы уже видели, круг — наиболее вероятный кандидат на роль экстремальной области во многих изопериметрических неравенствах и даже в более сильных изопериметрических свойствах, например, изопериметрической монотонности функционала по параметру. Однако существует множество неравенств, в которых круг не является экстремалью. Наиболее простой способ выработать гипотезу и найти кандидата на экстремаль — это составить таблицу значений интересующих нас величин для известных областей. На странице 94 приведена таблица, которая составлена с применением вычислительного пакета "Математика".

Анализируя результаты таблицы, можем предположить, что экстремумами могут быть три области — круг, узкий сектор, узкий эллипс и "игла" (три последние области вырожденные). То, что отношение функционалов достигает наибольшего значения на последовательности областей, сходящиеся к вырожденным областям, говорит о вероятном отсутствии экстремальной области для максимума отношения. Из работы [5] (см. также [6]) уже следует, что результаты вычислений лежат между единицей и четверкой. Более того, константа единица является следствием поточечного неравенства между функцией напряжения и квадратом конформного радиуса. Поэтому следует ожидать, что эта константа является неточной.

Теперь докажем ещё одно замечательное изопериметрическое свойство круга.

**Теорема 9.** При условии  $P(\Omega) < +\infty$  имеет место неравенство

$$\frac{3}{2} I_2(\Omega) \leq P(\Omega). \quad (2.9)$$

В классе ограниченных областей равенство  $3\mathbf{I}_2(\Omega) = 2\mathbf{P}(\Omega)$  реализуется тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.

*Доказательство.* разобьем на несколько шагов. Вначале докажем основное неравенство для ограниченных областей.

Из теорем 7 и 8 следует, что в этом случае ряд (2.3) сходится абсолютно. Таким образом, сумма ряда не зависит от перестановки его слагаемых. Перепишем представление (2.3) в более удобной для доказательства форме. Для этого введем новую переменную  $n = \alpha + \beta (= \gamma + \delta)$  и новое обозначение  $b_k(n) = a_k a_{n-k}$ . Формула (1.31) примет вид

$$\mathbf{P}(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \min\{j, n-j, k, n-k\} b_j(n) \overline{b_k(n)}. \quad (2.10)$$

Далее, получим аналогичное представление для конформного момента инерции. Для этого распишем квадрат модуля в формуле (1.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(\Omega) &= 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} j(n-j)k(n-k) a_j a_{n-j} \overline{a_k a_{n-k}}}{(n-1)n(n+1)} = \\ &= 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{j(n-j)k(n-k)}{(n-1)n(n+1)} b_j(n) \overline{b_k(n)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Внутренняя двойная сумма в разложениях (2.10) и (2.11) представляет для каждого фиксированного  $n$  эрмитову форму аргумента  $b_j$ , при этом матрица коэффициентов будет симметричной.

Имеет место следующее утверждение (см. [4]).

**Лемма 3.** Если действительная симметричная матрица  $A = (a_{jk})$  положительно определена, то эрмитова форма

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \zeta_j \overline{\zeta_k} \geq 0$$

для произвольных комплексных чисел  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $\zeta_j = x_j + iy_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Матрица  $A$  симметрична, следовательно,

$$ia_{jk} (y_j x_k - x_j y_k) + ia_{kj} (y_k x_j - y_k x_j) = 0.$$

Эрмитова форма примет вид

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} (x_j x_k + y_j y_k) \geq 0,$$

так как матрица  $A$  положительно определена. Это завершает доказательство.  $\square$

Таким образом, для эрмитовых форм с симметричной матрицей коэффициентов, как и для квадратичных форм, справедлив критерий Сильвестра положительной определенности. Следующая лемма устанавливает связь коэффициентов упомянутых выше эрмитовых форм.

**Лемма 4.** Пусть  $n$  – произвольное целое число ( $n \geq 2$ ), и пусть

$$l = \begin{cases} (n-1)/2 & \text{для нечетных } n; \\ n/2 - 1 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Тогда матрица  $M$ , состоящая из элементов

$$m_{jk} = \min\{j, k\} - \frac{6j(n-j)k(n-k)}{(n-1)n(n+1)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, l,$$

является положительно определенной.

*Доказательство.* Для того чтобы применить критерий Сильвестра, нам придется вычислить главные миноры матрицы  $M$ .

Обозначим через  $M(k)$  ( $k = 1, \dots, l$ ) главные подматрицы порядка  $k$  матрицы  $M$ . Таким образом, главные миноры — это определители  $\det(M(k))$  ( $k = 1, \dots, l$ ). Пусть  $M(k)_j$  обозначает  $j$ -ю строку  $M(k)$ . Мы сохраним обозначение  $M(k)$  в следующих преобразованиях:

- (i)  $M'(k)_j = M(k)_j - M(k)_{j-1}, \quad j = 2, \dots, k.$
- (ii)  $M'(k)_j = M(k)_j - M(k)_{j+1}, \quad j = 1, \dots, k-1.$
- (iii)  $M'(k)_j = M(k)_j - M(k)_1, \quad j = 2, \dots, k-1$  и  
 $M'(k)_k = M(k)_k - (n-2k+1)M(k)_1/2.$
- (iv)  $M'(k)_1 = M(k)_1 - \sum_{j=2}^k m_j M(k)_j,$

где  $m_j = -12j(n-j)/((n-1)n(n+1)), j = 2, \dots, k.$

Окончательно получим

$$M(k) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k-1} m_j + (n-2k+1)m_k/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -(n-2k+1)/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $m_1 = 1 - 12/(n(n+1))$ . Тогда

$$\det(M(k)) = \sum_{j=1}^{k-1} m_j + \frac{n-2k+1}{2} m_k.$$

Применяя, метод математической индукции по  $j$ , получаем

$$\det(M(k)) = 1 - \frac{2k((k-1)(3n-2k+1) + 3(n-2k+1)(n-k))}{(n-1)n(n+1)}.$$

Следовательно,  $\det(M(k))$  является полиномом третьей степени по  $k$ . Заметим, что этот полином равен единице в точке  $k = 0$  и обращается в нуль в точках  $k = (n-1)/2, n/2, (n+1)/2$ . В результате получим

$$\det(M(k)) = \left(1 - \frac{2k}{n-1}\right) \left(1 - \frac{2k}{n}\right) \left(1 - \frac{2k}{n+1}\right).$$

Это показывает, что  $\det(M(k)) \geq 0, k = 1, \dots, l$ . Таким образом, матрица  $M$  положительно определена. Это завершает доказательство леммы.  $\square$

Из определения имеем  $b_j(n) = b_{n-j}(n)$ . Тогда из леммы 4 следует, что эрмитова форма

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \min\{j, n-j, k, n-k\} - \right. \quad (2.12)$$

$$\left. - \frac{6j(n-j)k(n-k)}{(n-1)n(n+1)} \right) b_j(n) \overline{b_k(n)} \geq 0$$

для любых комплексных чисел  $b_1(n), b_2(n), \dots, b_{n-1}(n)$ , где  $n = 2, 3, \dots$ . Из (2.10)–(2.12) получим неравенство (2.9) для случая областей с конечной площадью.

Для доказательства общего случая  $\mathbf{P}(\Omega) < +\infty$  воспользуемся монотонностью функционалов от области, т. е. если  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , то

$$\mathbf{P}(\Omega_1) \leq \mathbf{P}(\Omega_2) \quad \text{и} \quad \mathbf{I}_2(\Omega_1) \leq \mathbf{I}_2(\Omega_2). \quad (2.13)$$

Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность ограниченных областей  $\Omega_n$  ( $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $\Omega_n \subset \Omega$ ), которые сходятся к  $\Omega$  как к ядру по Каратеодори [3]. Тогда функции Римана  $z_n : \mathbb{D} \rightarrow \Omega_n$  сходятся к  $z : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  (все отображающие функции соответствующим образом нормированы, например, переводят фиксированную точку в нуль и имеют в этой точке положительную производную). В частности, коэффициенты Тейлора  $z_n(\zeta)$  будут сходятся к коэффициентам Тейлора  $z(\zeta)$ . Тогда из сходимости коэффициентов, неравенства (2.9) для  $\Omega_n$  и свойства (2.13) следует неравенство (2.9) для  $\Omega$ .

Как отмечается в работе [12], одним из примеров такой последовательности областей являются области  $\Omega_r$  которые являются образами кругов  $\mathbb{D}_r$  ( $0 < r < 1$ ) функцией  $z(\zeta)$ .

Для завершения доказательства теоремы 9 исследуем равенство

$$\mathbf{P}(\Omega) = \frac{3}{2} \mathbf{I}_2(\Omega) \quad (2.14)$$

в предположении, что  $\mathbf{A}(\Omega) < +\infty$ .

Во-первых, используя равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \min\{j, n-j, k, n-k\} &= \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

докажем равенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{n+1}(j, k) a_j a_{n+1-j} \overline{a_k a_{n+1-k}} &= \\ &= \frac{4|a_1|^2(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} |q^{n-1}a_1 - a_n|^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

для всех  $a_j = q^{j-1}a_1$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  ( $|q| < 1$ ) и  $a_n \in \mathbb{C}$ , где

$$\begin{aligned} b_n(j, k) &= \min\{j, n-j, k, n-k\} - \\ &- \frac{6j(n-j)k(n-k)}{n(n^2-1)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Легко видеть, что выполняется следующее равенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} &= \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} c_{jk} + 2\operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n (c_{1k} + c_{nk}) \right) \\ &- c_{11} - c_{nn} - 2\operatorname{Re}(c_{1n}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $c_{jk} \in \mathbb{C}$ , причем  $c_{jk} = \overline{c_{kj}}$ .

Запишем левую часть (2.16) в виде

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{n+1}(j, k) a_j a_{n+1-j} \overline{a_k a_{n+1-k}} = K_1 + K_2,$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= |q|^{2(n-1)} |a_1|^4 \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-1} b_{n+1}(j, k), \\ K_2 &= 4\operatorname{Re} \left( a_1 a_n \sum_{k=1}^n b_{n+1}(1, k) \overline{a_k a_{n+1-k}} \right) - 4b_{n+1}(1, 1) |a_1 a_n|^2. \end{aligned}$$

Используя (2.18), (2.17) и (2.15), получаем

$$\begin{aligned} K_1 &= -2|q|^{2(n-1)} |a_1|^4 \left( \sum_{k=1}^n b_{n+1}(1, k) + \sum_{k=2}^{n-1} b_{n+1}(1, k) \right) = \\ &= 2|q|^{2(n-1)} |a_1|^4 (-b_{n+1}(1, 1) - b_{n+1}(1, n)) = \\ &= \frac{4|q|^{2(n-1)} |a_1|^4 (n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{4(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} |a_1 a_n|^2 + \\ &+ 4\operatorname{Re} \left( a_1 a_n (\bar{q})^{n-1} \bar{a}_1^2 \sum_{k=2}^{n-1} b_{n+1}(1, k) \right) = \\ &= \frac{4|a_1|^2 (n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \left( |a_n|^2 - 2\operatorname{Re} \left( a_n \bar{a}_1 (\bar{q})^{n-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Это доказывает равенство (2.16).



Из (2.12) следует, что (2.14) эквивалентно равенствам

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} b_n(j, k) a_j a_{n-j} \overline{a_k a_{n-k}} = 0, \quad (2.19)$$

где  $n = 2, 3, \dots$ . Теперь применим индукцию по  $n$ . Заметим, что

$$b_2(1, 1) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 b_3(j, k) = 0$$

и положим  $a_j = q^{j-1} a_1$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , где  $q = a_2/a_1$ . Из (2.16) и (2.19) получим  $a_n = q^{n-1} a_1$ . Следовательно, равенство (2.14) имеет место тогда и только тогда, когда

$$z(\zeta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \zeta^n = a_0 + \frac{a_1 \zeta}{1 - q\zeta}.$$

Это завершает доказательство теоремы 9. □

*Следствие 7. Пусть  $\Omega$  – односвязная область и  $\mathbf{A}(\Omega) < +\infty$ . Тогда имеет место неравенство*

$$\mathbf{I}_2(\Omega) \leq \frac{\mathbf{A}(\Omega)^2}{3\pi},$$

*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.*

Это утверждение в точности повторяет теорему 2. В действительности последнее неравенство представляет собой следствие двух более глубоких неравенств, а именно, теорем 8 и 9.

*Следствие 8. Пусть  $\Omega$  – односвязная область и  $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$ , тогда имеет место следующее неравенство*

$$\frac{\pi}{2} \mathbf{R}(\Omega)^4 \leq \mathbf{P}(\Omega),$$

*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  – круг.*

Последнее неравенство впервые было доказано Г. Полия и Г. Сеге и носит их имя. Аналогом этого неравенства для конформных моментов порядка  $\alpha$  является теорема 4. Отметим также, что неравенство Полия – Сеге является следствием теорем 1 и 9.

*Следствие 9. Пусть  $\Omega$  – односвязная область и  $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$ . Тогда имеет место строгое неравенство*

$$\frac{3}{2} \iint_{\Omega} \rho(z, \Omega)^2 dA < \mathbf{P}(\Omega).$$

Действительно, это неравенство является следствием поточечного неравенства (1.5). То, что неравенство будет строгим, следует из того, что равенство не достигается для круга, а также того факта, что в неравенстве (1.5) круг является единственной экстремальной областью.

На основании последней теоремы естественным является следующее предположение.

**Гипотеза 3.** Для произвольной односвязной области  $\Omega$  с ограниченной жесткостью кручения имеет место неравенство

$$3 \iint_{\Omega} \rho(z, \Omega)^2 dA \leq \mathbf{P}(\Omega).$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\Omega$  — круг.

**Упражнение 30.** Построить пример односвязной области, отличной от круга, для которой можно точно вычислить конформный момент инерции и жесткость кручения. Оценить абсолютную погрешность неравенства в теореме 9 для этой области.

## 2.3 Формула Давенпорта для областей с неограниченной площадью

Результаты изложенные в данном параграфе позволяют избавиться от ограничения на площадь области в теореме 9. Как будет показано ниже, наложенное ограничение носит “технический” характер, связанный с формулой Давенпорта.

Действительно, из анализа доказательства теорем 7 и 9 следует, что условие  $\mathbf{A}(\Omega) < +\infty$  обеспечивает абсолютную сходимость ряда 1.31 относительно коэффициентов отображающей функции  $z(\zeta)$ . Таким образом, сумма ряда не зависит от способа суммирования, что позволяет записывать ряд в удобной для исследования форме, чем мы успешно воспользовались при доказательстве теоремы 9.

В работе [12] показано, что формуле Давенпорта можно придать смысл и для односвязных областей с неограниченной площадью при естественном ограничении  $\mathbf{P}(\Omega) < +\infty$ . Далее мы не будем в точности следовать указанной работе, но приведем полностью доказательство, связанное с теоремой 9. Помимо этого в работе [12] содержатся много других, близких к теме пособия результатов, поэтому работа настоятельно рекомендуется для самостоятельного изучения.

Из вариационного определения жесткости кручения легко видно, что  $\mathbf{P}(\Omega)$  не отрицательна. Тот же самый факт нетрудно получить и из определения (1.2) классическими методами теории дифференциальных уравнений в частных производных. Тогда как для формулы Давенпорта указанное свойство не очевидно. Следующее утверждение дает, в частности, ответ на указанный вопрос.

**Теорема 10.** Пусть  $\mathbf{P}(\Omega) < +\infty$ , тогда имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2, \quad (2.20)$$

где  $[\cdot]$  обозначает операцию взятия целой части числа.

*Доказательство.* Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и разобьем сумму

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \min\{k, n-k, l, n-l\} d_n(k, l)$$

на четыре суммы

$$\begin{aligned} S(n) = & \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{l=1}^{[n/2]} M + \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} M + \\ & \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \sum_{l=1}^{[n/2]} M + \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} M, \end{aligned}$$

где  $d_n(k, l) := a_k a_{n-k} \overline{a_l a_{n-l}}$ ,  $M := \min\{k, n-k, l, n-l\} d_n(k, l)$ . Сделаем индексы суммирования в трех последних суммах аналогичными первой сумме, для этого введем новые индексы суммирования  $k' = n - k$ , или  $l' = n - l$ , соответственно, там где это необходимо. Окончательно получим

$$S(n) = 4 \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{l=1}^{[n/2]} \min\{k, l\} d_n(k, l).$$

С другой стороны, рассмотрим сумму

$$C(n) := \sum_{k=1}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2 = \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{l=k}^{n-k} \sum_{j=k}^{n-k} d_n(l, j).$$

Переставим пределы суммирования в последней сумме в обратном порядке, для этого заметим, что при каждом фиксированном  $k$  индексы  $l$  и  $j$  пробегает целочисленную решетку, образующую квадрат, при этом с ростом  $k$

квадрат уменьшается. В результате для четных  $n$  квадрат, соответствующий  $k = [n/2]$ , вырождается в точку, а для нечетных состоит из четырех точек, отстоящих друг от друга на единицу. Таким образом, суммирование по индексам  $k$ ,  $l$  и  $j$  осуществляется по целочисленной решетке, заполняющей пирамиду с вершиной или без, в зависимости от четности или нечетности  $n$ . Перестановку суммирования можно осуществить по аналогии с перестановкой порядка интегрирования в тройном интеграле. Получим

$$C(n) = \sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{l=1}^{[n/2]} d_n(l, j) \sum_{k=1}^{\min\{l, j\}} 1 + \sum_{j=[n/2]+1}^{n-1} \sum_{l=1}^{[n/2]} d_n(l, j) \sum_{k=1}^{\min\{l, n-j\}} 1 +$$

$$\sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} d_n(l, j) \sum_{k=1}^{\min\{n-l, j\}} 1 + \sum_{j=[n/2]+1}^{n-1} \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} d_n(l, j) \sum_{k=1}^{\min\{n-l, n-j\}} 1.$$

Сделаем индексы суммирования в трех последних суммах аналогичными первой сумме, по аналогии со сделанным выше. Окончательно получим,

$$C(n) = 4 \sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{l=1}^{[n/2]} d_n(l, j) \sum_{k=1}^{\min\{l, j\}} 1 = 4 \sum_{j=1}^{[n/2]} \sum_{l=1}^{[n/2]} \min\{l, j\} d_n(l, j).$$

Таким образом,  $S(n) = C(n)$ .

Следовательно, представление (2.20) имеет место для областей с конечной площадью. Заметим, что для жесткости кручения получены и другие, не упомянутые в учебном пособии, представления через коэффициенты отображающей функции (см., например, [1]). Отметим лишь некоторые преимущества формулы (2.20). Как уже отмечалось выше, жесткость кручения неотрицательна, в то время как формула (2.20) представляет  $\mathbf{P}(\Omega)$  как конечную или бесконечную сумму неотрицательных слагаемых. Основным же преимуществом полученного представления является то, что формула остается справедливой при менее жестких ограничениях на область.

Действительно, для того чтобы распространить формулу Давенпорта на области с  $\mathbf{P}(\Omega) < +\infty$ , применим полученное представление  $\mathbf{P}(\Omega)$  для монотонно возрастающей последовательности областей  $\Omega_j$  с конечной площадью, сходящейся к области  $\Omega$  как к ядру по Каратеодори. Тогда из свойства монотонности имеем

$$\mathbf{P}(\Omega_j) \leq \mathbf{P}(\Omega_{j+1}), \quad \mathbf{P}(\Omega_j) \leq \mathbf{P}(\Omega).$$

Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\Omega_j) = \sup_j \mathbf{P}(\Omega_j) = \mathbf{P}(\Omega).$$

Из сходимости по Каратеодори как к ядру следует сходимость соответствующих коэффициентов отображающих функций. Это завершает доказательство теоремы.  $\square$

Покажем, что представления аналогичные теореме 10 можно получать и для других функционалов односвязной области, более того, по этим представлениям можно “оценить” на сколько функционалы отличаются друг от друга.

## 2.4 Еще одно оригинальное доказательство неравенства Сен–Венана — Полиа и следствия из него

На данный момент автору известно три принципиально различных доказательства неравенства Сен–Венана — Полиа.

Первое принадлежит Г. Полиа и основано на технике симметризации областей. Хотя методы симметризации были известны уже достаточно долго, но еще не были изучены их основные свойства и не было большого числа примеров применения методов симметризаций. Например, к моменту доказательства не были известны экстремальные свойства круга при симметризации Штейнера и Шварца.

Тем более ценным оказалось доказательство предложенное Г. Давенпортом, применившим аппарат теории функций комплексного переменного. Доказательство Г. Полиа гипотезы Сен–Венана, насчитывающей 100 лет, послужило примером и толчком для исследования свойств и применения различных симметризационных методов. Отметим, что аппарат теории функций в то время уже успешно применялся в теории упругости в работах Н. И. Мусхелишвили и других.

Третий подход к доказательству неравенства в 60-х годах XX века был предложен Л. Е. Пейном и основан на оценках на линиях уровня классической функции напряжения. Данный подход также послужил толчком для целого ряда работ и монографий, базирующихся на оценках на линиях уровня (см., например, [8]). Отметим, что два метода доказательства оказались эффективными для доказательства аналога неравенства Сен–Венана — Полиа в случае конечносвязных плоских областей.

Предложенное ниже доказательство, является вариацией доказательства Давенпорта, но, как будет видно, из доказательства вытекают интересные неравенства и формулы.

Второе доказательство неравенства Сен–Венана — Полиа. Применяя неравенство Коши — Буняковского к сумме  $C(n)$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2 &\leq \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{l=k}^{n-k} 1^2 \sum_{l=k}^{n-k} |a_l a_{n-l}|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{[n/2]} (n - 2k + 1) \sum_{l=k}^{n-k} |a_l a_{n-l}|^2. \end{aligned}$$

Переставляя индексы суммирования местами в последней сумме, найдем

$$C(n) \leq \sum_{l=1}^{[n/2]} |a_l a_{n-l}|^2 \sum_{k=1}^l (n - 2k + 1) + \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} |a_l a_{n-l}|^2 \sum_{k=1}^{n-l} (n - 2k + 1).$$

Осталось заметить, что внутренние суммы совпадают. Действительно,

$$\sum_{k=1}^l (n - 2k + 1) = (n + 1)l - 2 \sum_{k=1}^l k = (n + 1)l - (l + 1)l = l(n - l) \quad (2.21)$$

и, аналогично,

$$\sum_{k=1}^{n-l} (n - 2k + 1) = (n + 1)(n - l) - (n - l + 1)(n - l) = l(n - l). \quad (2.22)$$

Окончательно получим следующую оценку

$$C(n) \leq \sum_{l=1}^{n-1} l(n - l) |a_l a_{n-l}|^2.$$

Для завершения доказательства неравенства осталось учесть представление (1.14) для  $\mathbf{A}(\Omega)^2$  и (2.20) для жесткости кручения.

Случаи равенства в неравенстве Коши — Буняковского рассматриваются аналогично тому, как это сделано в теореме 8.  $\square$

Доказательство неравенства Сен–Венана — Полиа еще упростится, если воспользоваться новым представлением для квадрата площади области

$$\mathbf{A}(\Omega)^2 = \pi^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{[n/2]} (n - 2k + 1) \sum_{l=k}^{n-k} |a_l a_{n-l}|^2. \quad (2.23)$$

Заметим, что последним шагом в предыдущем доказательстве как раз и было обоснование нового представления для квадрата площади области.

Другим следствием из продемонстрированного доказательства является новое представление для конформного момента инерции. Действительно, применяя равенства (2.21) и (2.22), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l)a_l a_{n-l} &= \\ &= \sum_{l=1}^{[n/2]} a_l a_{n-l} \sum_{k=1}^l (n-2k+1) + \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} a_l a_{n-l} \sum_{k=1}^{n-l} (n-2k+1). \end{aligned}$$

Переставляя в обоих слагаемых повторные суммы местами, получим

$$\sum_{l=1}^{n-1} l(n-l)a_l a_{n-l} = \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1) \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l}. \quad (2.24)$$

Подставляя последнее равенство в представление (1.12), получим новое представление

$$\mathbf{I}_c(\Omega) = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left| \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1) \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2}{(n-1)n(n+1)}. \quad (2.25)$$

Из формулы (2.20) и полученного представления вытекает более элегантно доказательство теоремы 9.

*Второе доказательство неравенства  $3\mathbf{I}_c(\Omega) \leq 2\mathbf{P}(\Omega)$ .* Применяя неравенство Коши — Буняковского (1.15) к левой части равенства (2.24) и полагая

$$u = n - 2k + 1, \quad v = \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l},$$

получим оценку

$$\left| \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1) \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2 \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1)^2.$$

Вычислим последнюю сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[n/2]} ((n+1)^2 - 4(n+1)k + 4k^2) &= \left[ \frac{n}{2} \right] (n+1)^2 - \\ &- 4(n+1) \frac{[n/2]([n/2]+1)}{2} + 4 \frac{[n/2]([n/2]+1)(2[n/2]+1)}{6}. \end{aligned}$$

Рассматривая случаи четного и нечетного  $n$ , убедимся, что в обоих случаях справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} (n - 2k + 1)^2 = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{6}. \quad (2.26)$$

Окончательно получаем оценку

$$\left| \sum_{k=1}^{[n/2]} (n - 2k + 1) \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2 \leq \frac{(n - 1)n(n + 1)}{6} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l} \right|^2.$$

Учитывая выведенные представления, отсюда немедленно вытекает доказываемое неравенство.

Помимо упрощения основного доказательства, также существенно упрощается рассмотрение случаев равенства. Действительно, равенство возможно тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.16). В нашем случае это условие примет вид:

$$c_n(n - 2k + 1) = \sum_{l=k}^{n-k} a_l a_{n-l}, \quad k = \overline{1, [n/2]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $c_n$  – некоторые комплексные числа. Вычтем друг из друга равенства соответствующие соседним значениям  $k$ , придем к равенствам

$$a_k a_{n-k} = c_n, \quad k = \overline{1, [n/2]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда легко выводятся равенства (1.18), которые приводят к окончательной формуле (1.19) для отображающей функции. Это завершает доказательство неравенства.  $\square$

Таким образом, полученные в последних двух параграфах представления (2.20), (2.23) и (2.25) выявили их близкую природу (напомним, что исследуются геометрические и физические функционалы области) и позволили привести простые доказательства нескольких неравенств математической физики, в том числе и одного классического результата.

## 2.5 Доказательство одного неравенство Пейна

Докажем вначале неравенство, принадлежащее Г. Полия и Г. Сегё.

Классическая функция напряжения  $u(z, \Omega)$  не зависит от расположения области на плоскости. Поэтому расположим область так, чтобы точка



$z = 0$  принадлежала  $\Omega$  и в этой точке достигала максимума функция напряжения, т. е.

$$\mathbf{u}(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} u(z, \Omega) = u(0, \Omega).$$

Пусть конформное отображение  $z = z(\zeta)$  дополнительно нормировано условием  $z(0) = 0$ . Тогда из формул (2.1) и (2.4) следует равенство

$$u(0, \Omega) = \Phi(0, 0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \quad (2.27)$$

Сравнивая коэффициенты в формуле (1.13) и последней формуле, немедленно установим неравенство

$$2\pi \mathbf{u}(\Omega) \leq \mathbf{A}(\Omega), \quad (2.28)$$

именуемое неравенством Поля — Сегё. Также очевидно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда  $a_k = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , т. е.  $z = a_1 \zeta$ . Таким образом, равенство достигается только для случая круга.

Приведем еще одну полезную формулу для вычисления функционала  $\mathbf{u}(\Omega)$ . Хорошо известно, что правая часть равенства (2.27) выражается через интеграл по границе единичного круга от квадрата модуля отображающей функции. Действительно, справедливо равенство

$$u(0, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |z(re^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Для доказательства неравенства Пейна нам понадобятся множества уровня функции напряжения. По аналогии с множествами уровня конформного радиуса, введем в рассмотрение множества

$$\Omega(\nu) := \{z \in \Omega \mid u(z, \Omega) > \nu\},$$

где  $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(\Omega)$ . Множество  $\Omega(\nu)$  ( $0 \leq \nu < \mathbf{u}(\Omega)$ ) представляет собой либо односвязную область, либо конечное объединение односвязных областей. Отсюда легко выводиться, что неравенство (2.28) справедливо и для  $\Omega(\nu)$ .

Заметим, что функция напряжения для  $\Omega(\nu)$  определяется из соотношения

$$u(z, \Omega(\nu)) = u(z, \Omega) - \nu, \quad (z \in \Omega(\nu), 0 < \nu < \mathbf{u}(\Omega)).$$

В частности,  $u(\Omega(\nu)) = \mathbf{u}(\Omega) - \nu$ .

Далее применим теорию интегралов Лебега к функционалу  $\mathbf{P}(\Omega)$ . Обозначим

$$a(\nu) := \mathbf{A}(\Omega(\nu)) = \int_{\Omega_\nu} dA,$$

тогда согласно определения интеграла по Лебегу, имеем

$$\mathbf{P}(\Omega) = 2 \int_0^{\mathbf{A}(\Omega)} \nu(a) da.$$

Здесь площадь области  $\mathbf{A}(\Omega)$  может быть и неограниченной. Проинтегрируем интеграл по частям и сделаем замену переменной  $\nu(a) = \tilde{\nu}$ , получим

$$\mathbf{P}(\Omega) = 2 \int_0^{\mathbf{u}(\Omega)} a(\nu) d\nu.$$

Учитывая замечания, сделанные выше, применим неравенство (2.28) к полученному представлению для жесткости кручения, будем иметь

$$2 \int_0^{\mathbf{u}(\Omega)} a(\nu) d\nu \geq 4\pi \int_0^{\mathbf{u}(\Omega)} (\mathbf{u}(\Omega) - \nu) d\nu = 2\pi \mathbf{u}(\Omega)^2.$$

Таким образом, доказано неравенство, впервые полученное Л. Е. Пейном,

$$\mathbf{P}(\Omega) \geq 2\pi \mathbf{u}(\Omega)^2. \quad (2.29)$$

Из (2.28) следует, что равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\Omega$  совпадает с кругом.

Сделаем одно замечание к неравенству. Л. Е. Пейн отмечал, что в Г. Полиа и Г. Сегё в своей монографии [1] были близки к доказательству неравенства (2.29): в действительности, применяя неравенство Коши — Буняковского, они получили несколько более слабых оценок через коэффициенты отображающей функции. Как видно из доказательства, предложенного Л. Е. Пейном, результат по существу получен интегрированием неравенства (2.28). Таким образом, неравенство (2.29) просто доказывается комбинированием методов исследования.

В заключение получим для функционала  $\mathbf{u}(\Omega)^2$  получим представление, аналогичное (2.20).

Зафиксируем  $n(\in \mathbb{N})$  и рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} |a_l a_{n-l}|^2 &= \sum_{l=1}^{[n/2]} \frac{|a_l a_{n-l}|^2 \sum_{k=1}^l (n-2k+1)}{l(n-l)} + \\ &+ \sum_{l=[n/2]+1}^{n-1} \frac{|a_l a_{n-l}|^2 \sum_{k=1}^{n-l} (n-2k+1)}{l(n-l)}. \end{aligned}$$

Здесь были использованы равенства (2.21) и (2.22). Переставим в обоих слагаемых повторные суммы местами, найдем

$$\sum_{l=1}^{n-1} |a_l a_{n-l}|^2 = \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1) \sum_{l=k}^{n-k} \frac{|a_l a_{n-l}|^2}{l(n-l)}.$$

Используя полученное равенство, получим искомое представление

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\Omega)^2 &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} |a_l a_{n-l}|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{[n/2]} (n-2k+1) \sum_{l=k}^{n-k} \frac{|a_l a_{n-l}|^2}{l(n-l)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Сравнивая последнюю формулу с представлением (2.23), заметим, что с точностью до константы, одно представление получается из другого формальной заменой  $a_l \rightleftharpoons a_l/\sqrt{l}$ .

## 2.6 Примеры вычисления жесткости кручения односвязной области

До этого момента нам было известно точное выражение жесткости кручения только для односвязных областей, ограниченных эллипсом. Именно для таких областей решение краевой задачи (1.5) строится весьма просто (по существу, угадывается), как следствие, точная формула для вычисления жесткости кручения области. Именно на этих фактах строилась теория приближенного вычисления  $\mathbf{P}(\Omega)$  с XVII века до середины XX века. В математической физике наиболее известны приближенные формулы, связанные с именами Лорда Рэлея, Коши, В. Сен-Венана.

В отличие от конформного радиуса и конформных моментов односвязной области, нет достаточно общих методов нахождения функции напряжения и жесткости кручения области. Поэтому написаны объемные монографии по вычислению физических функционалов для узких семейств областей часто встречающихся в практических приложениях (см., например, [13]).

Формула Давенпорта сводит нахождение жесткости кручения односвязной области к проблеме нахождения коэффициентов функций конформно отображающей область на единичный круг. Далее, функция напряжения односвязной области выражается через функцию Грина области как интеграл по области по одной из переменных, в свою очередь, одним из методов нахождения функции Грина, является метод её построения через конформное отображение области на круг. Это дает решение задачи нахождения функции напряжения. Изучение и применение функции Грина является самостоятельной и непростой задачей.

Конечно это не единственный возможный путь. например в монографии [1] рассмотренные задачи решаются в терминах последовательности собственных функций и соответствующих им собственных значений (см. стр. 147–152).

Ниже будут приведены примеры вычисления только функционала  $\mathbf{P}(\Omega)$ . Отметим, что поведение функция напряжения при симметризации Штейнера не аналогично свойству конформного радиуса, которое было успешно использовано при вычислении в примерах параграфа 1.5. По этому вопросу известен целый ряд работ и контрпримеров даже в классе выпуклых областей.

**Пример 1.**  $\Omega(= \mathbb{D}_r)$  — круг радиуса  $r$ .

Результат читателю известен с первого параграфа данного пособия, также читатель легко может подсчитать жесткость кручения на основании теорем из данной главы. Поэтому нашей целью будет “тестирование” формулы (2.20) на хорошо известном примере.

Для этого возьмем отображение  $z(\zeta)$  в общем виде по формуле (1.19). Тогда  $a_n = a_1 q^{n-1}$  ( $n \geq 1$ ,  $|q| < 1$ ). Подставляя найденные коэффициенты в (2.20), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{D}_r) &= \frac{\pi |a_1|^4}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |q|^{n-2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left( \sum_{l=k}^{n-k} 1 \right)^2 = \frac{\pi |a_1|^4}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |q|^{n-2} \times \\ &\quad \sum_{k=1}^{[n/2]} (n - 2k + 1)^2 = \frac{\pi |a_1|^4}{12} \sum_{n=2}^{\infty} n(n^2 - 1) |q|^{n-2}. \end{aligned}$$

Здесь на последнем шаге было применено равенство (2.26). Применяя стандартные методы анализа суммирования степенных рядов, получим

$$\mathbf{P}(\mathbb{D}_r) = \frac{\pi |a_1|^4}{2(1 - |q|^2)^4}.$$

Точка  $1/q$  при отображении  $z(\zeta)$  переходит в бесконечно удаленную точку, симметричную центру круга  $\mathbb{D}_r$  относительно его границы. Следовательно прообразом центра круга является точка  $\bar{q}$ , симметричная с  $1/q$  относительно границы круга  $\mathbb{D}$ . Таким образом, радиус круга будет равен

$$r = |z(\bar{q}) - z(1)| = |a_1| \left| \frac{\bar{q} - 1}{(1 - q\bar{q})(1 - q)} \right| = \frac{|a_1|}{(1 - |q|^2)}.$$

Подставляя найденное выражение радиуса в формулу для жесткости кручения, получаем хорошо знакомую формулу.

**Пример 2.**  $\Omega$  — правильный  $m$ -угольник со стороной  $a$ .

Основной формулой в данном и последующих примерах будет представление (2.20), поэтому для вычислений нам понадобятся коэффициенты Маклорена соответствующих конформных отображений.

Применяя к (1.32) формулу (1.28), найдем

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= \mathbf{R}(\Omega) \int_0^\zeta \frac{dt}{(1 - t^m)^{2/m}} = \frac{\mathbf{R}(\Omega)}{\Gamma(2/m)} \int_0^\zeta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 2/m) t^{mk} dt}{k!} = \\ &= \frac{\mathbf{R}(\Omega)}{\Gamma(2/m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 2/m) \zeta^{mk+1}}{k!(mk + 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем хорошо известный результат о структуре коэффициентов Маклорена для  $m$ -симметричной области, а именно

$$a_l = \begin{cases} \frac{\mathbf{R}(\Omega) \Gamma(k + 2/m)}{\Gamma(2/m) k!(mk + 1)}, & l = mk + 1, k \in \mathbb{N} \\ 0, & l \neq mk + 1. \end{cases}$$

В связи с тем, что большое число коэффициентов обращается в ноль, формула (2.20) для многоугольников упрощается. Заметим, что произведение  $a_l a_{n-l}$  не обращается в ноль тогда и только тогда, когда

$$l = m(l_1 - 1) + 1, \quad n - l = m(l_2 - 1) + 1,$$

где  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ . Следовательно,

$$n = m(l_1 + l_2 - 2) + 2 = m(n_1 - 2) + 2.$$

Теперь введем в (2.20) новые индексы суммирования  $l_1$ ,  $n_1$  и

$$k_1 = \frac{k-1}{m} + 1.$$

Непосредственно проверяется, что пределы изменения индексов суммирования остаются прежними, только появляется нижний индекс — единица.

Окончательно формула (2.20) для правильного  $m$ -угольника примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_m) = & \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_{m(l-1)+1} a_{m(n-l-1)+1} \right|^2 = \frac{\pi \mathbf{R}(\Omega_m)^4}{2\Gamma(2/m)^4} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{[n/2]} \times \\ & \left( \sum_{l=k}^{n-k} \frac{\Gamma(l-1+2/m)\Gamma(n-l-1+2/m)}{(l-1)!(n-l-1)!(m(l-1)+1)(m(n-l-1)+1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Формула (1.33) дает выражение для функционала  $\mathbf{R}(\Omega_m)$ . В заключении заметим, что для четных  $m = 2s$  возможна другая замена индексов суммирования по следующим формулам

$$l = s(l_1 - 2) + 1, \quad k = s(k_1 - 2) + 1 \text{ и } n = s(n_1 - 4) + 2,$$

которая приводит к другой формуле для правильных многоугольников с четным числом сторон

$$\mathbf{P}(\Omega_{2s}) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{k=2}^{[n/2]} \left| \sum_{l=k}^{n-k} a_{s(l-2)+1} a_{s(n-l-2)+1} \right|^2.$$

**Пример 3.**  $\Omega$  — прямоугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ .

Отображающая функция была нами построена ранее, поэтому остается найти коэффициенты разложения в ряд. Для этого применяя к (1.25) формулу (1.28), имеем

$$\begin{aligned} z(\zeta) = & \frac{\mathbf{R}(\Omega)}{\pi} \int_0^{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \frac{(e^{i\gamma t})^{2k}}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+1/2)}{l!} \frac{(e^{-i\gamma t})^{2l}}{l!} dt + \\ & + \frac{ib}{2} = \frac{\mathbf{R}(\Omega)}{\pi} \int_0^{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n-k+1/2)}{k!(n-k)!} \times \\ & \times e^{2i\gamma(2k-n)t} t^{2n} dt + \frac{ib}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно получим следующее разложение в ряд

$$z(\zeta) = \frac{\mathbf{R}(\Omega)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n+1}}{e^{2i\gamma n}(2n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n-k+1/2)e^{4i\gamma k}}{k!(n-k)!} + \\ + \frac{ib}{2},$$

где параметр  $\gamma$  выражается через модуль прямоугольника  $\kappa$  по формуле (1.26). Таким образом,  $a_0 = ib/2$  и  $a_{2n} = 0$  ( $n > 1$ ), а для оставшихся коэффициентов имеем

$$a_{2n-1} = \frac{\mathbf{R}(\Omega)}{\pi e^{2i\gamma(n+3)}(2n-1)} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k-1/2)\Gamma(n-k+1/2)e^{4i\gamma k}}{(k-1)!(n-k)!},$$

$n \geq 1$ .

Из тех же самых соображений, что были приведены выше, сделаем в формуле (2.20) замену индексов суммирования

$$l = 2l_1 - 1, \quad k = 2k_1 - 1 \text{ и } n = 4n_1 - 2,$$

получим формулу жесткости кручения для прямоугольника

$$\mathbf{P}(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \left| \sum_{l=k}^{2n-k} a_{2l-1} a_{2(2n-l)-1} \right|^2 = \frac{\mathbf{R}(\Omega)^4}{2\pi^3} \times \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \left| \sum_{l=k}^{2n-k} \frac{s(l)s(2n-l)}{(2l-1)(2(2n-l)-1)} \right|^2,$$

где

$$s(n) := \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(j-1/2)\Gamma(n-j+1/2)e^{4i\gamma j}}{(j-1)!(n-j)!}.$$

Выражение для функционала  $\mathbf{R}(\Omega)$  задается формулой (1.27).

**Пример 4.**  $\Omega$  – односвязная область, ограниченная тремя кривыми:  $y = x^{-1}$  ( $x > 0$ ),  $x = 0$  и  $y = 0$ .

Некоторую трудность представляет собой вычисление коэффициентов отображающей функции. Четные коэффициенты  $a_k$  ( $k > 0$ ) обращаются в ноль, а для нечетных коэффициентов возможно получить рекуррентное соотношение которое мы не приводим здесь. Отметим, что эти трудности для конформных моментов удалось обойти, используя свойства конформного радиуса области.

В заключении рекомендуем читателю ознакомиться с монографиями [14] и [15], а также с замечательными книгами по неравенствам [16], [17], [18] и [19].

**Упражнение 31.** Пусть  $\Omega_\lambda$  сектор радиуса  $a$  и угла  $\gamma = 2\pi\lambda$ . Вычислить приближенно функционал  $\mathbf{P}(\Omega_\lambda)$  при  $\lambda = 1/4, 1/2, 3/4$  и  $\lambda = 1$ .

$$\left[ \mathbf{P}(\Omega_{1/4}) = 0.0823276a^4, \mathbf{P}(\Omega_{1/2}) = 0.297557a^4, \right. \\ \left. \mathbf{P}(\Omega_{3/4}) = 0.572483a^4, \mathbf{P}(\Omega_1) = 0.878056a^4 \right]$$

**Упражнение 32.** Найти асимптотическое поведение  $\mathbf{P}(\Omega_\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $a = 1$ ). Вычислить пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(\Omega_\lambda)}{\mathbf{I}_2(\Omega_\lambda)}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\mathbf{P}(\Omega_\lambda)}{\mathbf{I}_2(\Omega_\lambda)}.$$

$$\left[ \mathbf{P}(\Omega_\lambda) = \lambda^3 \left\{ \frac{2\pi^3}{3} + \frac{496\zeta(5)\lambda}{\pi} + \frac{16\pi^5\lambda^2}{5} + o(\lambda^2) \right\}, \right. \\ \left. \frac{\pi^2}{6}, 1.62578 \right]$$



# Приложение А

## Вспомогательный сведения из теории функций комплексного переменного

Приведём некоторые сведения, относящиеся к классическому курсу комплексного анализа, которые активно применялись в пособии. Более подробные изучение этих фактов с доказательствами можно найти в монографиях [3], [7], [20] и других.

### А.1 Теорема Римана о конформном отображении

Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей — это фундаментальный факт теории функций комплексного переменного, она находит приложения в различных разделах математики. Теорема была сформулирована Б. Риманом в середине XIX века. Интересно отметить, что несмотря на то, что теорема носит имя Б. Римана, первое строгое математическое доказательство теоремы методами теории функций принадлежит П. Кёбе и К. Каратеодори и относится к началу XX века. Здесь стоит заметить, что многие теоремы или утверждения, принадлежащие Б. Риману, не имели строгого обоснования в современном понимании, но были обоснованы позже, в тоже время, самая знаменитая в математике *гипотеза Римана о нулях дзета функции*, была сформулирована Б. Риманом как гипотеза и носит это имя не первую сотню лет.

**Теорема 11.** *Для произвольных односвязных областей  $\Omega$  и  $\Sigma$  с границами, состоящими более чем из одной точки, произвольных точек  $z_0 \in \Omega$ ,  $w_0 \in \Sigma$  и произвольного  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  существует единственное конформное отображение  $w = f(z)$  отображающее  $\Omega$  на  $\Sigma$  и такое, что  $w_0 = f(z_0)$ ,  $\arg f'(z_0) = \alpha_0$*

В заключении отметим, что доказательство теоремы тесно связано с конформным радиусом области.

## А.2 Отображения многоугольников

Теорема Римана утверждает лишь существование и не является конструктивным инструментом для построения конформного отображения. Одним из конструктивных методов построения отображения многоугольников является теорема, принадлежащая Г. Шварцу и Э. Кристоффелю.

**Теорема 12.** Пусть функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости  $\mathbb{H}$  на внутренность ограниченного многоугольника  $\Omega_n$  с углами  $\alpha_k\pi$  ( $k = \overline{1, n}$ ) при вершинах. Пусть точки  $a_k \in \mathbb{R}$  ( $k = \overline{1, n}$ ) соответствуют вершинам многоугольника, тогда конформное отображение представимо в виде

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_0,$$

где  $z_0, C, C_0$  — некоторые постоянные.

Постоянные  $a_k, z_0, C, C_0$  называются акцессорными параметрами отображения. Задача нахождения параметров является самостоятельной и трудной проблемой.

Отметим, что существуют вариации формулы Кристоффеля — Шварца, связанные с отображением единичного круга на многоугольник, внешности единичного круга на многоугольник. Отметим также, что многоугольник может содержать одну и более вершин в бесконечности.

Этот метод является не единственным конструктивным методом построения конформных отображений.

## А.3 Дробно-линейные отображения

Простейшим конформным отображением является отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

где  $ad - bc \neq 0$ .

Точки  $z$  и  $z^*$  называются симметричными относительно окружности  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ , если они лежат на одном луче с центром окружности  $z_0$  и выполнено соотношение

$$|z - z_0||z^* - z_0| = r^2.$$

Например, точка  $\zeta^* = 1/\bar{\zeta}$  является симметричной с точкой  $\zeta$  относительно единичной окружности с центром в нуле.

Ангармоническим отношением четырех точек  $z_k$  называется выражение вида

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Отметим, что нумерация точек имеет значение. Например если все точки лежат на некоторой окружности, то точки, как правило, перечисляются по часовой или против часовой стрелки.

Приведем свойства дробно–линейных отображений, находящие широкое применения в приложениях.

1. Дробно–линейное отображение осуществляет конформное отображение расширенной  $z$ –плоскости на  $w$ –плоскость.
2. Дробно–линейное отображение отображает любой круг расширенной  $z$ –плоскости на круг  $w$ –плоскости.
3. Дробно–линейное отображение отображает любую пару точек симметричных относительно некоторой окружности в пару точек симметричных относительно образа окружности.
4. Существует единственное дробно–линейное отображение переводящее три точки  $z_k$   $z$ –плоскости в три точки  $w_k$   $w$ –плоскости.
5. Произвольную окружность расширенной  $z$ –плоскости при помощи дробно–линейного отображения можно отобразить на произвольную окружность расширенной  $w$ –плоскости
6. Дробно–линейное отображение сохраняет ангармоническое отношение четырех точек.



# Приложение В

## Таблицы для некоторых функционалов плоских односвязных областей

В приложении приведены значения функционалов некоторых областей, а также примеры вычисления комбинаций функционалов. Эти данные целесообразно использовать для построения и проверки изопериметрических неравенств, поиска экстремальных областей, а также проверки гипотез на их состоятельность.

### В.1 Канонические области

Если выражение функционала громоздко и мало информативно для применений, то в таблице приведены численные приближения его значения. Значение конформного момента порядка  $\alpha$  приведены не для всех областей, ввиду их громоздкости. Функционалы, не подсчитанные на момент публикации, отмечены прочерком.

#### Круг

радиуса  $r$

$\mathbf{L} = 2\pi r$	$\mathbf{I}_c = \frac{\pi r^4}{3}$
$\mathbf{A} = \pi r^2$	$\mathbf{P} = \frac{\pi r^4}{2}$
$\rho = r$	$\mathbf{I} = \frac{\pi r^4}{6}$
$\mathbf{R} = r$	$\mathbf{u} = \frac{r^2}{2}$

$$\mathbf{I}_\alpha = \frac{\pi r^{\alpha+2}}{\alpha+1}$$

### Эллипс

полуоси  $a, b$ ;  $a \geq b$

$$\mathbf{L} = 4aE\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \quad \mathbf{A} = \pi ab$$

$$\rho = b \quad \mathbf{P} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{R} = \frac{a+b}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right)^{-1} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-1}, \quad q = \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2$$

$$\mathbf{u} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$\frac{a}{b}$	$\mathbf{I}_c a^{-1} b^{-3}$	$\mathbf{I} a^{-1} b^{-3}$
1	1.047198	0.523599
6/5	—	0.603593
4/3	—	0.638136
3/2	—	0.669043
7/4	—	0.699913
2	—	0.719948
3	—	0.756309
5	—	0.774926
7	—	0.780055
12	—	0.78358
100	—	0.785372
$\infty$	1.909859	0.785398

**Узкий эллипс**

$$\frac{b}{a} \rightarrow 0$$

$$\mathbf{L} \sim 4a \qquad \mathbf{I}_c \sim \frac{6ab^3}{\pi}$$

$$\mathbf{A} = \pi ab \qquad \mathbf{P} \sim \pi ab^3$$

$$\rho = b \qquad \mathbf{I} \sim \frac{\pi ab^3}{4}$$

$$\mathbf{R} \sim \frac{4b}{\pi} \qquad \mathbf{u} = b^2$$

**Равносторонний треугольник**сторона  $a$ 

$$\mathbf{L} = 3a \qquad \mathbf{I}_c = 0.013884 a^4.$$

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} (\cong 0.433013 a^2) \qquad \mathbf{P} = \frac{\sqrt{3}a^4}{80} (\cong 0.021651 a^4)$$

$$\rho = \frac{a}{2\sqrt{3}} (\cong 0.288675 a) \qquad \mathbf{I} = \frac{a^4}{96\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{R} = \frac{2\pi a}{[\Gamma(1/3)]^3} (\cong 0.326807 a) \quad \mathbf{u} = 0.055556 a^2$$

**Квадрат**сторона  $a$ 

$$\mathbf{L} = 4a \qquad \mathbf{I}_c = \frac{2(4\pi)^3 \ln 2 a^4}{\Gamma(1/4)^8} (\cong 0.092137 a^4)$$

$$\mathbf{A} = a^2 \qquad \mathbf{P} = 0.140577 a^4$$

$$\rho = \frac{a}{2} \qquad \mathbf{I} = \frac{a^4}{24}$$

$$\mathbf{R} = \frac{4\sqrt{\pi}a}{\Gamma(1/4)^2} (\cong 0.539353 a) \quad \mathbf{u} = 0.147343 a^2$$

**Прямоугольник**стороны  $a, b$ ;  $a \geq b$ 

$$\mathbf{L} = 2(a + b) \qquad \boldsymbol{\rho} = \frac{b}{2}$$

$$\mathbf{A} = ab \qquad \mathbf{I} = \frac{ab^3}{12} \left(1 - \frac{b}{2a}\right)$$

$$\mathbf{R} = \frac{2b}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^{-2}, \quad q = e^{-\pi a/b}$$

$\frac{a}{b}$	$\mathbf{P} a^{-1}b^{-3}$	$\mathbf{I}_c a^{-1}b^{-3}$	$\mathbf{u} b^{-2}$
1	0.140577	0.092137	0.147343
2	0.228682	0.145483	0.227744
3	0.263317	0.16453	0.245364
4	0.280813	0.174058	0.249034
5	0.291317	0.179775	0.249793
6	0.29832	0.183586	0.249893
7	0.303321	0.186308	0.249898
8	0.307073	0.188350	0.249899
10	0.312325	0.191209	0.249899
12	0.315826	0.193114	0.249899
100	0.331233	—	0.249899
$\infty$	0.333333=1/3	0.202642 = $2/\pi^2$	0.250000

**Узкий прямоугольник**

$$\frac{b}{a} \rightarrow 0$$

$$\mathbf{L} \sim 2a \qquad \mathbf{I}_c \sim \frac{2ab^3}{\pi^2}$$

$$\mathbf{A} = ab \qquad \mathbf{P} \sim \frac{ab^3}{3}$$



$$\rho = \frac{b}{2} \qquad \mathbf{I} \sim \frac{ab^3}{12}$$

$$\mathbf{R} \sim \frac{2b}{\pi} \qquad \mathbf{u} \sim \frac{b^2}{4}$$

### Полукруг

радиуса  $r$

$$\mathbf{L} = (2 + \pi)r \qquad \mathbf{I}_c = \pi \left( \frac{17}{6} - 4 \ln 2 \right) r^4 \quad (\cong 0.190835r^4)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\pi r^2}{2} \qquad \mathbf{P} = 0.29756 r^4$$

$$\rho = \frac{r}{2} \qquad \mathbf{I} = \frac{(15\pi - 32)r^4}{180} \quad (\cong 0.084021r^4)$$

$$\mathbf{R} = 0.600566 r \qquad \mathbf{u} \text{ — не подсчитан.}$$

### Круговой сектор

радиус  $r$ ; угол  $\gamma (= 2\pi\lambda)$

$$\mathbf{L} = (2 + \gamma)r \qquad \mathbf{A} = \gamma r^2/2$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\lambda)}{1 + \sin(\pi\lambda)} r, & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} r, & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = 4\lambda \left[ \sqrt{1 + \lambda^2} - \lambda \right] \left[ \sqrt{1 + \lambda^{-2}} - \lambda^{-1} \right]^\lambda$$

$$\mathbf{I} = \begin{cases} \frac{1}{180} \left( 15\gamma + \frac{5h(\gamma)}{8\sqrt{2} \sin((\gamma + \pi)/4)^5} \right) r^4, & 0 \leq \gamma \leq \pi; \\ \frac{15(\pi + \gamma) - 64}{360} r^4, & \pi \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$

$$h(\gamma) := \cos\left(\frac{5\gamma}{4}\right) + 27 \cos\left(\frac{3\gamma}{4}\right) - 28 \cos\left(\frac{\gamma}{4}\right) + 27 \sin\left(\frac{5\gamma}{4}\right) - 5 \sin\left(\frac{3\gamma}{4}\right) - 36 \sin\left(\frac{\gamma}{4}\right)$$

$\lambda$	$\mathbf{R} r^{-1}$	$\mathbf{P} r^{-4}$	$\mathbf{I}_c r^{-4}$	$\mathbf{u} r^{-2}$
1/12	0.235315	0.006774	0.004309	—
1/10	0.26822	0.010631	0.006797	—
1/8	0.311959	0.018123	0.011656	—
1/6	0.372817	0.034909	0.022597	—
1/4	0.462483	0.082328	0.053523	—
1/3	0.524182	0.144212	0.093572	—
1/2	0.600566	0.297557	0.190835	—
2/3	0.643506	0.476517	0.301206	—
3/4	0.658037	0.572483	0.359258	—
5/6	0.669545	0.671738	0.418607	—
1	0.686292	0.878056	0.540083	—

### Узкий сектор

$$r = 1, \gamma = 2\pi\lambda \rightarrow 0$$

$$\mathbf{L} = 2 + \gamma$$

$$\mathbf{A} = \gamma/2$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\gamma}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{5}{24}\gamma^2 - \frac{1}{12}\gamma^3 + o(\gamma^3) \right)$$

$$\mathbf{R} = \frac{2\gamma}{\pi} \left( 1 - \frac{(1 + \ln(4\pi) - \ln(\gamma))}{2\pi}\gamma + o(\gamma) \right) =$$

$$= 4\lambda^{1+\lambda} (1 - (1 + \ln 2)\lambda + o(\lambda^2))$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\gamma^3}{\pi^3} \left( \frac{\pi}{2} - (4 \ln 2 - 1)\gamma - \frac{12 - \pi^2}{6\pi}\gamma^2 + o(\gamma^2) \right)$$

$$\mathbf{P} = \gamma^3 \left( \frac{1}{12} - \frac{31}{\pi^5}\zeta(5)\gamma + \frac{\gamma^2}{10} + o(\gamma^2) \right)^1$$

$$\mathbf{I} = \frac{\gamma^3}{48} \left( 1 - \gamma + \frac{7}{10}\gamma^2 + o(\gamma^2) \right)$$

$\mathbf{u}$  — не подсчитан.

**Области, ограниченные гиперболами**

1)  $\Omega_{\pi/4}$  — граничные кривые  $y = 1/x$  ( $x > 0$ ),  $y = x$ ,  $x = 0$

**L** и **A** — неограничены

$$\rho = 0.428711$$

$$\mathbf{R} = 0.498422$$

$$\mathbf{I}_c = 0.122959$$

$$\mathbf{I} = 0.051576$$

**P** — не подсчитан

**u** — не подсчитан

2)  $\Omega_{\pi/2}$  — граничные кривые  $y = 1/x$  ( $x > 0$ ),  $x = 0$ ,  $y = 0$

**L** и **A** — неограничены

$$\rho = 2 - \sqrt{2} (\cong 0.581948)$$

$$\mathbf{R} = 0.679192$$

$$\mathbf{I}_c = 0.387965$$

$$\mathbf{I} = 0.16182$$

**P** — не подсчитан

**u** — не подсчитан

3)  $\Omega_{\pi}$  — граничные кривые  $y = 1/x$  ( $x > 0$ ),  $y = -1/x$  ( $x < 0$ ),  $x = 0$

**L** и **A** — неограничены

$$\rho = 2/\sqrt[4]{27} (\cong 0.877383)$$

$$\mathbf{R} = 1.01838$$

$\mathbf{I}_c$  — не подсчитан

$$\mathbf{I} = 0.715715$$

**P** — не подсчитан

**u** — не подсчитан

4)  $\Omega_{3\pi/2}$  — граничные кривые  
 $y = 1/x$ ,  $y = -1/x$  ( $x < 0$ ),  $x = 0$  ( $y < 0$ ),  $y = 0$  ( $x > 0$ )

**L** и **A** — неограничены

$$\rho = 2/\sqrt[4]{27} (\cong 0.877383)$$

$$\mathbf{R} = 1.062208$$

$\mathbf{I}_c$  — не подсчитан

$$\mathbf{I} = 1.26095$$

**P** — не подсчитан

**u** — не подсчитан

---

<sup>1</sup>Здесь  $\zeta(n)$  — дзета функция Римана.

5)  $\Omega_{2\pi}$  — граничные кривые  $y = 1/x$ ,  $y = -1/x$  и разрез по положительной части вещественной оси

$\mathbf{L}$  и  $\mathbf{A}$  — неограничены

$$\rho = 2/\sqrt[4]{27} (\cong 0.877383) \quad \mathbf{R} = 1.12834$$

$$\mathbf{I}_c \text{ — не подсчитан} \quad \mathbf{I} = 1.80619$$

$$\mathbf{P} \text{ — не подсчитан} \quad \mathbf{u} \text{ — не подсчитан}$$

6)  $\Omega^4$  — граничные кривые  $y = 1/x$ ,  $y = -1/x$

$\mathbf{L}$  и  $\mathbf{A}$  — неограничены

$$\rho = \sqrt{2} (\cong 1.41421) \quad \mathbf{R} = 2\sqrt{2/\pi} (\cong 1.59577)$$

$$\mathbf{I}_c \text{ — не подсчитан} \quad \mathbf{I} = 3.55556$$

$$\mathbf{P} \text{ — не подсчитан} \quad \mathbf{u} \text{ — не подсчитан}$$

## В.2 Примеры комбинации функционалов

1)  $\mathbf{I}_c/\mathbf{R}^4$

Область	$\mathbf{I}_c/\mathbf{R}^4$
Круг	1.047198 ( $= \pi/3$ )
Правильный шестиугольник	1.053802
Квадрат	1.088793
Равносторонний треугольник	1.217173
Узкий эллипс	$\infty$
Прямоугольник ( $a/b = 2$ )	14.60035
Узкий прямоугольник	$\infty$
Полукруг	1.466946
Круг с разрезом вдоль радиуса	2.434591
Узкий сектор	$\infty$
Области, ограниченные гиперболами:	
$\Omega_{\pi/4}$	1.992380
$\Omega_{\pi/2}$	1.823150

2)  $I_c/A^2$ 

Область	$I_c/A^2$
Круг	0.106103 (= $1/3\pi$ )
Правильный шестиугольник	0.101768
Квадрат	0.0921375
Равносторонний треугольник	0.074049
Узкий эллипс	0.00000
Прямоугольник ( $a/b = 2$ )	0.036371
Узкий прямоугольник	0.000000
Полукруг	0.0773425
Круг с разрезом вдоль радиуса	0.054722
Узкий сектор	0.000000
Области, ограниченные гиперболами:	
$\Omega_{\pi/4}$	0.000000
$\Omega_{2\pi}$	0.000000

2)  $P/A^2$ 

Область	$P/A^2$
Круг	0.159155 (= $1/2\pi$ )
Правильный шестиугольник	0.153467
Квадрат	0.140577
Равносторонний треугольник	0.115470
Эллипс ( $a/b = 2$ )	0.127324
Узкий эллипс	0.00000
Прямоугольник ( $a/b = 2$ )	0.114341
Узкий прямоугольник	0.000000
Полукруг	0.120595
Круг с разрезом вдоль радиуса	0.0889656
Узкий сектор	0.000000
Области, ограниченные гиперболами:	
$\Omega_{\pi/4}$	0.000000
$\Omega_{2\pi}$	0.000000

3)  $P/I_c$  и  $I_c/P$ 

Область	$P/I_c$	$I_c/P$
Круг	1.50000	0.666667
Правильный шестиугольник	1.50801	0.663026
Квадрат	1.52598	0.655317
Равносторонний треугольник	1.55943	0.641260
Круговой сектор раствора $\pi/64$	1.63474	0.611718
Круговой сектор раствора $\pi/8$	1.58417	0.631245
Круговой сектор раствора $\pi/4$	1.55479	0.643174
Круговой сектор раствора $\pi/2$	1.53818	0.650119
Полукруг	1.55925	0.641339
Круговой сектор раствора $5\pi/4$	1.57624	0.634421
Круговой сектор раствора $3\pi/2$	1.59351	0.627545
Круговой сектор раствора $7\pi/4$	1.61014	0.621064
Круговой сектор раствора $2\pi$	1.62578	0.615089
Узкий круговой сектор раствора $\gamma$ (в пределе при $\gamma \rightarrow 0$ )	1.64493 ( $= \pi^2/6$ )	0.607927
Узкий прямоугольник — “игла” (в пределе при $b/a \rightarrow 0$ )	1.64493 ( $= \pi^2/6$ )	0.607927
Узкий эллипс (в пределе при $b/a \rightarrow 0$ )	1.64493 ( $= \pi^2/6$ )	0.607927

4)  $P/I$  и  $I/P$ 

Область	$P/I$	$I/P$
Круг	3.000000	0.333333
Правильный шестиугольник	3.18974	0.313505
Квадрат	3.3744	0.2963
Равносторонний треугольник	3.600000	0.277778
Эллипс ( $a/b = 2$ )	3.490910	0.286458
Узкий эллипс	4.000000	0.250000
Прямоугольник ( $a/b = 2$ )	3.6592	0.2733
Узкий прямоугольник	4.000000	0.250000
Полукруг	3.541432	0.282372
Узкий сектор	4.000000	0.250000
Круг с разрезом вдоль радиуса	4.085475	0.244770

5)  $\mathbf{R}/\rho$  и  $\rho/\mathbf{R}$ 

Область	$\mathbf{R}/\rho$	$\rho/\mathbf{R}$
Круг	1.000000	1.000000
Правильный шестиугольник	1.037548	0.963811
Квадрат	1.078705	0.927037
Равносторонний треугольник	1.132093	0.883319
Эллипс ( $a/b = 2$ )	1.212001	0.825082
Узкий эллипс	1.273240 ( $= 4/\pi$ )	0.785398
Прямоугольник ( $a/b = 2$ )	1.263782	0.791276
Узкий прямоугольник	1.273240 ( $= 4/\pi$ )	0.785398
Полукруг	1.20113	0.832548
Круг с разрезом вдоль радиуса	1.37258	0.728553
Узкий сектор	1.273240 ( $= 4/\pi$ )	0.785398
Полуполоса	1.273240 ( $= 4/\pi$ )	0.785398
Полоса	1.273240 ( $= 4/\pi$ )	0.785398
Области, ограниченные гиперболами:		
$\Omega_{\pi/4}$	1.16261	0.860137
$\Omega_{\pi/2}$	1.15945	0.862475
$\Omega_{\pi}$	1.1607	0.861551
$\Omega_{3\pi/2}$	1.21066	0.825999
$\Omega_{2\pi}$	1.28602	0.77759
$\Omega^4$	1.1283792	0.886227

6)  $I_c/I$  и  $I/I_c$ 

Область	$I_c/I$	$I/I_c$
Круг	2.000000	0.500000
Правильный шестиугольник	2.115205	0.472767
Квадрат	2.211300	0.452223
Равносторонний треугольник	2.308588	0.433165
Узкий эллипс	2.431708	0.411234
Прямоугольник ( $a/b = 2$ )	2.327728	0.429603
Узкий прямоугольник	2.431708	0.411234
Полукруг	2.271259	0.440284
Узкий сектор	2.431708	0.411234
Круг с разрезом вдоль радиуса	2.522934	0.397941
Области, ограниченные гиперболами:		
$\Omega_{\pi/4}$	2.384040	0.419457
$\Omega_{\pi/2}$	2.397510	0.417100



# Литература

- [1] Г. Полия, Г. Сегё. *Изопериметрические неравенства в математической физики*. Физматгиз, М., 1962.
- [2] Ф. Г. Авхадиев. *Неравенства для интегральных характеристик областей*. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2006. Учебное пособие.
- [3] Г. М. Голузин. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. Наука, Ленинград, 1966.
- [4] P. L. Duren. *Univalent functions*. Springer–Verlag, New–York, 1983.
- [5] Ф. Г. Авхадиев. *Конформные отображения и краевые задачи*. Казанск. фонд “Математика”, Казань, 1996.
- [6] Ф. Г. Авхадиев. Решение обобщенной задачи сен–венана. *Матем. сборник*, 189(12):3–12, 1998.
- [7] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного*. Наука, М., 1987.
- [8] C. Bandle. *Isoperimetric inequalities and applications*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1980.
- [9] E. Makai. A lower estimation of the principal frequencies of simply connected membranes. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 16:319–323, 1965.
- [10] W. K. Hayman. Some bounds for the principal frequency. *Appl. Anal.*, 7:247–254, 1977.
- [11] R. G. Salahudinov. An isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane. *J. of Inequal. & Appl.*, 6:253–260, 2001.
- [12] D. A. Abramov, F. G. Avkhadiev, D. Kh. Giniyatova. Versions of the schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 32(2):149–158, 2011.

- [13] А. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. *Кручение упругих тел*. Физматгиз, М., 1963.
- [14] В. Сен-Венан. *Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм*. ГИФМЛ, М., 1961.
- [15] В. Бляшке. *Круг и шар*. Наука, М., 1967.
- [16] Г. Полия, Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд. *Неравенства*. КомКнига, М., 2006.
- [17] Э. Беккенбах, Р. Беллман. *Неравенства*. Мир, М., 1965.
- [18] D. S. Mitrinovich. *Analytic inequalities*. Springer-Verlag, Berlin, Hedelberg, New York, 1970.
- [19] Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. *Геометрические неравенства*. Наука, Ленинград, 1980.
- [20] В. Коппенфельс, Ф. Штальман. *Практика конформных отображений*. Мир, М., 1963.

# Предметный указатель

- Ангармоническое отношение, 29, 83, **83**
- Гипотеза  
    вторая, 47  
    первая, 36, 45, 48  
    третья, 66
- Главные миноры матрицы, 61
- Длина границы, **6**, 9, 44
- Евклидовый момент инерции относительно границы, 17, 65
- Жесткость кручения, **7**, 8, 10, 53, 54, **54**, 56, 57, 59, 62, 63, 65, 67, 68, 74, 76
- Изопериметрическое неравенство, *см.* Неравенство изопериметрическое
- Классическое изопериметрическое неравенство, *см.* Неравенство классическое изопериметрическое
- Конформный  
    момент инерции, **8**, 11–14, 16, 53, 59, 62, 63, 65  
    момент порядка  $\alpha$ , 35, 36, 44, 47, 48, 50  
    радиус, **7**, 8, 11, 12, 14, 37, 41, 48, 49, 81
- Критерий Сильвестра, 61
- Линии уровня, **48**
- Максимальный внутренний радиус, **7**, 8, 12, 36, 47–49, 65
- Максимум расстояния до границы области, **7**, 8, 10
- Максимум функции напряжения, **7**, 73–75
- Матрица коэффициентов квадратичной формы, 61
- Множества уровня, **48**, 49, 50, 73
- Момент инерции  
    евклидовый, *см.* Евклидовый момент инерции относительно границы  
    конформный, *см.* Конформный момент инерции  
    полярный, *см.* Полярный момент инерции
- Неравенство  
    Коши — Буняковского, 42, 58, 70  
    Пейна, 74  
    Сен-Венана — Поля, 57  
    изопериметрическое, 14, 17, 36, 44, 59, 65  
    классическое изопериметрическое, 9, 44
- Определитель матрицы, 62
- Основная частота колебания мембраны, **7**, 10
- Отображение  
    дробно-линейное, 17, 21, 23, 28, 29, 58, 65, **82**  
    конформное, 6, 11, 17, 37, 44–46

- на равносторонний треуголь-  
ник, 20
- полосы на круг, 25
- полуполосы на круг, 23
- Площадь, **6**, 9, 14, 17, 36, 44, 45, 57,  
65, 66, 73
  - множества уровня, 48, 50, 74
- Полярный момент инерции, 56, **56**
- Представление через  $a_k$ 
  - квадрата максимума функции на-  
пряжения, 75
  - квадрата площади, 15, 70
  - конформного момента инерции,  
12, 71
  - максимума функции напряжения,  
73
  - площади, 15
  - полярного момента инерции, 56
- Примеры
  - круг, 18, 76
  - область, ограниченная гипербо-  
лой, 32, 40, 79
  - полоса, 24
  - полукруг, 21
  - полуполоса, 23
  - правильный  $n$ -угольник, 37, 77
  - прямоугольник, 26, 78
  - равносторонний треугольник, 19
- Пространство аналитических функ-  
ций
  - Бергмана  $B_\alpha(\Omega)$ , 41, 44, 51
  - Харди  $H^2(\Omega)$ , 41
- Симметризация, 69
  - Штейнера, 18, 76
- Супремум конформного радиуса, *см.*  
Максимальный внутренний  
радиус
- Теорема Римана, 6, 81, **81**
- Формула
  - Давенпорта, 54, 67, 68, 76
  - Кристоффеля — Шварца, 19, 26,  
28, 38, 82
- Функция
  - Римана, 63
  - аналитическая, 44–46, 51, 55, 81,  
82
  - гармоническая, 54–56
  - напряжения, **7**, 8, 54
  - расстояния до границы, **6**, 8, 13
- Эрмитова форма, 60